Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási Minisztérium
Alapkezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2004/2005-ös tanév

1. forduló

haladók III. kategória

Feladatok

1. Az a_n számtani sorozat elemei pozitív egészek. Mutassuk meg, hogy ha a sorozat elemei között van négyzetszám, akkor végtelen sok van!

2. Igazoljuk, hogy egy egységélű kocka felületén van olyan pont, melyből a felület bármely másik pontja legfeljebb 2 egység hosszú úton elérhető, ha csak a kocka felületén haladhatunk!

3. Igazoljuk, hogy ha az x, y, z valós számokra teljesül az

$$x + y + z = 6 \quad \text{és az} \quad xy + yz + zx = 9$$

egyenlőség, akkor az x, y, z számok mindegyike nemnegatív és nem nagyobb 4-nél.

4. Az $ABCD$ konvex négyszögben az $ABD\sphericalangle = 20^\circ$, a $DBC\sphericalangle = 60^\circ$, az $ADB\sphericalangle = 30^\circ$, és a $BDC\sphericalangle = 70^\circ$. Bizonyítsa be, hogy a négyszög területe $\frac{1}{2} \cdot (AB \cdot CD + AD \cdot BC)$!

5. Legyen f egy olyan függvény, ami egész számpárokhoz 1-et vagy -1-et rendel a következő szabályok szerint:

$$f(0,0) = -1,$$
$$f(1,0) = 1$$

és minden (k,l) egész számpárra

$$f(k,l) \cdot f(k+1,l) \cdot f(k,l+1) = 1, \quad \text{valamint}$$
$$f(k,l) \cdot f(k-1,l) \cdot f(k,l-1) = 1.$$

Mennyi $f(2005^2, 2005)$ értéke?