Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2006/2007-es tanév
3. (döntő) forduló
haladók II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Legyen α az $x^2+px+q=0$ egyenlet egyik valós gyöke, β pedig az $x^2-px-q=$ $=0$ egyik valós gyöke, ahol $p,q\in\mathbb{R}$ és $q\neq 0$. Bizonyítsuk be, hogy az $x^2-2px-2q=0$ egyenletnek van α és β közé eső valós gyöke!

Megoldás. Bevezetjük a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} f(x)&=x^2+px+q,\\ g(x)&=x^2-px-q,\\ h(x)&=x^2-2px-2q. \end{aligned}$$

Célunk annak megmutatása, hogy $h(\alpha)$ és $h(\beta)$ ellenkező előjelű, ebből következik a feladat állítása. 2 pont

Kifejezzük $h(x)$-et kétféle módon.

1. $h(x)=3x^2-2f(x)$, tehát $h(\alpha)=3\alpha^2-2f(\alpha)=3\alpha^2>0$. Itt felhasználtuk, hogy $f(\alpha)=0$, és azt, hogy $q\neq 0$ miatt $\alpha\neq 0$. 2 pont

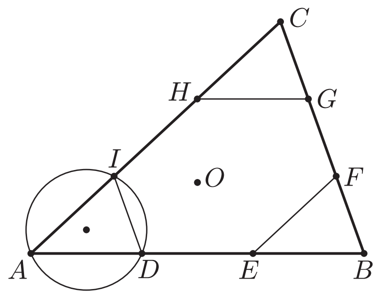
2. $h(x)=2g(x)-x^2$, vagyis $h(\beta)=2g(\beta)-\beta^2=-\beta^2<0$, hiszen $g(\beta)=0$ és $\beta\neq 0$. 2 pont

Azt kaptuk, hogy $h(\alpha)>0$ és $h(\beta)<0$, ezért $h(x)$ α és β között valahol felveszi a 0 értéket. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Rajzoljuk meg azokat a köröket, amelyek átmennek egy tetszőleges háromszög egyik csúcsán és a csúcsból induló oldalak csúcshoz közelebbi harmadolópontjain! Bizonyítsuk be, hogy van olyan kör, amelynek sugara a megrajzolt körök sugarának számtani közepe, és mindhárom kört érinti.

Megoldás.



Tekintsük az ábrát.

Az ábra szerint az ADI, EBF, HGC háromszögek köréírt körét kell megrajzolni, ahol D, E, F, G, H, I mind harmadolópontok.

Az ADI, EBF és HGC háromszögek egybevágóak, mert rendre az A, B, C csúcsú (centrumú) háromszoros nagyítással mindegyikből az ABC háromszöget kapjuk. 1 pont

Az egybevágóságok alapján a három háromszög köréírt körének sugara is egyenlő hosszú. 1 pont

Ezért a sugarak számtani közepe megegyezik az egyes háromszögek köréírt körének r sugárával. 1 pont

Mivel például az A centrumú 3-szoros nagyítás az ADI háromszög köréírt körének középpontját az ABC háromszög O köréírt körének középpontjába viszi át, ezért az ABC háromszög köréírt körének sugara $3r$. 1 pont

Ugyanez mondható el a másik két kör esetén is. 1 pont

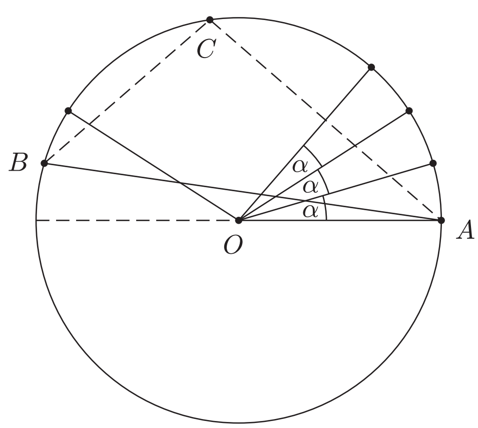
Ez pedig azt jelenti, hogy az O középpontú r sugarú kör érinti mindhárom „megrajzolt" kört, hiszen középpontjaik távolsága $2r$, sugaruk pedig r és r. 2 pont

Összesen: 7 pont

3. Tekintsük a szabályos n-szög csúcsai által meghatározott összes háromszöget! Mekkora lehet n értéke, ha a háromszögek között pontosan ugyanannyi tompaszögű van, mint hegyesszögű?

Megoldás. Számoljuk össze a tompaszögű háromszögek számát!

Legyen a tompaszögű háromszög leghosszabb oldala AB, ahol az A csúcsot „átmenetileg" rögzítjük. Ábránk szerint így akkor kapunk tompaszögű háromszöget, ha a szabályos n-szög köréírt körének az AB húr által határolt kisebbik ívén választjuk ki a C csúcsot.



$$\alpha = \frac{360^\circ}{n}.$$

$$AOB\sphericalangle = x \cdot \frac{360^\circ}{n}.$$

Az A csúcs rögzítése esetén pozitív körüljárást tekintve a B csúcs megválasztására teljesülnie kell a

$$\frac{360^\circ}{n} < x \cdot \frac{360^\circ}{n} < \frac{n}{2} \cdot \frac{360^\circ}{n}$$

feltételnek, azaz $1 < x < \frac{n}{2}$. 1 pont

I. eset: Ha n páratlan szám, akkor a C csúcsra megválasztható középponti szögek nagysága rendre $\alpha, 2\alpha, 3\alpha, \ldots, (x-1)\alpha$.

Rögzített A csúcs esetén így a kiválasztható tompaszögű háromszögek száma a $2 \leqq x \leqq \leqq \frac{n-1}{2}$ feltétel miatt

$$\sum_{x=2}^{\frac{n-1}{2}} (x-1) = 1+2+3+\ldots+\frac{n-3}{2} = \frac{(n-1)(n-3)}{8}.$$ 1 pont

Ha nem rögzítjük az A csúcsot, akkor a tompaszögű háromszögek száma $\frac{n(n-1)(n-3)}{8}$.

Ha n páratlan szám, akkor a csúcsok közül nem lehet derékszögű háromszög csúcsait kiválasztani, ezért a tompaszögű háromszögek száma megegyezik a kiválasztható háromszögek számának felével.

Az összes kiválasztható háromszög száma $\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$. 1 pont

Így $\frac{n(n-1)(n-3)}{8} = \frac{n(n-1)(n-2)}{12}$, ahonnan $n = 5$ adódik. 1 pont

II. eset: Ha n páros szám, akkor $2 \leqq x \leqq \frac{n-2}{2}$.

De most derékszögű háromszög is kiválasztható a csúcsok közül, mégpedig $\frac{n(n-2)}{2}$-féleképpen. 1 pont

A tompaszögű háromszögek száma rögzített A csúcs esetén:

$$\sum_{x=2}^{\frac{n-2}{2}} (x-1) = 1+2+3+\ldots+\frac{n-4}{2} = \frac{(n-2)(n-4)}{8}.$$

Ha nem rögzítjük az A csúcsot, akkor a tompaszögű háromszögek száma $\frac{n(n-2)(n-4)}{8}$. 1 pont

A feladat feltételei szerint ekkor

$$2 \cdot \frac{n(n-2)(n-4)}{8} + \frac{n(n-2)}{2} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}.$$

Az egyenlet egyetlen megoldása (ami megfelelő): $n = 4$. 1 pont

Tehát a megfelelő szabályos sokszögek vagy 4, vagy pedig 5 oldalúak.

Összesen: 7 pont