Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2006/2007-es tanév
1. forduló
haladók III. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Melyek azok az x valós számok, amelyekre igaz, hogy

$$\frac{8}{\sqrt{x+6}-\sqrt{x-2}} \leqq 6-\sqrt{x+1}?$$

Megoldás. A gyök alatti mennyiségek nemnegatívak, ezért $x \geqq 2$. 1 pont

A bal oldali tört nevezőjét gyöktelenítve

$$\frac{8\left(\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}\,\right)}{8}=\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2}$$

adódik. 1 pont

Az eredeti egyenlőtlenség így ekvivalens a $\sqrt{x+6}+\sqrt{x-2} \leqq 6-\sqrt{x+1}$ egyenlőtlenséggel, ezért

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6} \leqq 6.$$ 1 pont

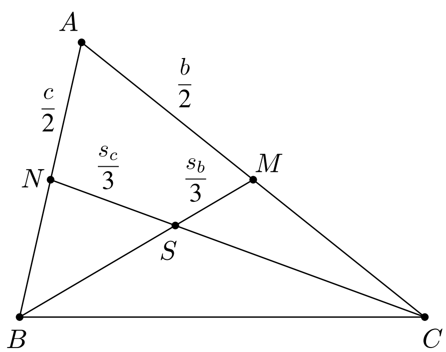
Az $f(x)=\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}+\sqrt{x+6}$ függvény $x \geqq 2$ esetén szigorúan monoton növekvő. 2 pont

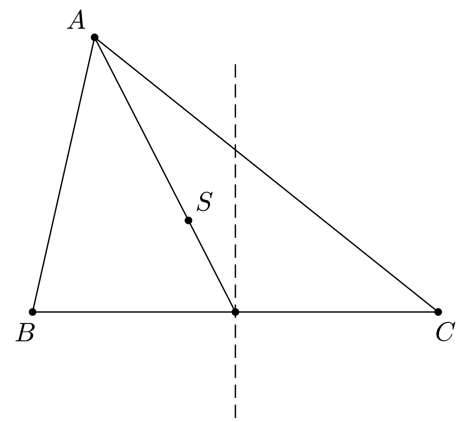
Mivel $f(3)=\sqrt{4}+\sqrt{1}+\sqrt{9}=6$, ezért az egyenlőtlenség megoldása $2 \leqq x \leqq 3$, azaz $x \in [2;3]$. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Az ABC háromszög BM és CN súlyvonalának metszéspontja S, és tudjuk, hogy $AMSN$ érintőnégyszög. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög egyenlő szárú!

Megoldás. Megmutatjuk, hogy $AB=AC$. A háromszög oldalainak és súlyvonalainak hosszára a szokásos jelöléseket használjuk.





Az érintőnégyszög szemközti oldalainak hosszát összeadva ugyanazt az értéket kapjuk. Az $AMSN$ négyszögre alkalmazva:

$$AM + SN = AN + SM,$$ 1 pont

vagyis

$$\frac{b}{2} + \frac{1}{3}\,s_c = \frac{c}{2} + \frac{1}{3}\,s_b.$$

Átrendezve:

$$(*) \qquad \frac{b-c}{2} = \frac{s_b - s_c}{3}.$$ 2 pont

Indirekt feltesszük, hogy $b \neq c$. Legyen mondjuk $b > c$. Ekkor az előző egyenletből $s_b > s_c$ következne. 2 pont

Ez pedig ellentmondás, mert egy háromszögben a hosszabb oldalhoz rövidebb súlyvonal tartozik. Ennek bizonyítása a második ábráról leolvasható: Ha $b > c$, akkor A a BC felező-merőlegesének ugyanazon oldalára esik, mint B. Ekkor az S súlypont is ebben a félsíkban lesz, tehát $BS < CS$. Mivel a súlypont harmadolja a súlyvonalakat, innen $\frac{2}{3}s_b < \frac{2}{3}s_c$ következik, amiből $s_b < s_c$.

Tehát a $b > c$ feltevésből $s_b < s_c$ következik, ami ellentmond a (*) egyenletnek. A $b < c$ feltevés hasonló módon ellentmondásra vezet, tehát csak $b = c$ lehetséges, vagyis a háromszög egyenlő szárú. 2 pont

---

Összesen: 7 pont

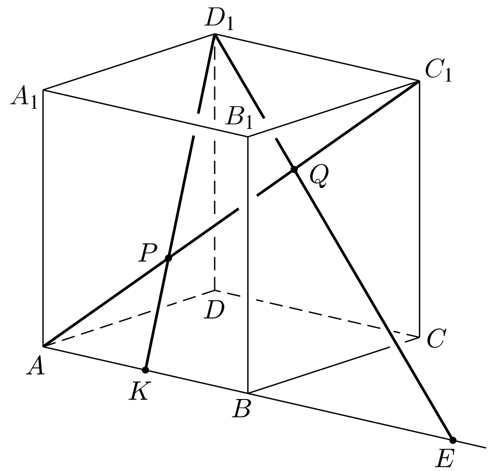
Megjegyzés: A $(*)$ egyenletből algebrailag is befejezhető a bizonyítás, felhasználva a $2(a^2 + c^2) = b^2 + 4s_b^2$ és a $2(a^2 + b^2) = c^2 + 4s_c^2$ összefüggéseket.

3. Egy egységnyi élű kocka alaplapja az $ABCD$ négyzet. A kocka A_1, B_1, C_1, D_1 csúcsaira teljesül, hogy AA_1, BB_1, CC_1 és DD_1 párhuzamosak. Az AC_1 testátló két harmadolópontja

P és Q. A D_1P és a D_1Q egyenes az $ABCD$ lap síkját a K, illetve az E pontban metszi. Határozzuk meg az AK és az AE szakaszok hosszát!

Megoldás.

Tekintsük a következő ábrát:



A P, Q, C_1, D_1 pontokra illeszkedő sík az $ABCD$ négyzet síkját és az $A_1B_1C_1D_1$ síkját párhuzamos egyenesekben metszi, mert az utóbbi két sík párhuzamos. 2 pont

Ezek alapján a K és E pont rajta van az AB egyenesen, hiszen D_1C_1 párhuzamos AK-val és AE-vel. 1 pont

Az AKP és C_1D_1P háromszög hasonlósága alapján $\dfrac{AK}{C_1D_1} = \dfrac{AP}{PC_1} = \dfrac{1}{2}$, 1 pont

így $AK = \dfrac{1}{2}\,C_1D_1 = \dfrac{1}{2}$. 1 pont

Hasonló módon az AQE és a C_1QD_1 háromszög hasonlósága alapján

$$\frac{AE}{C_1D_1} = \frac{AQ}{C_1Q} = \frac{2}{1},$$ 1 pont

tehát $AE = 2 \cdot C_1D_1 = 2$. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Tekintsük azokat a pozitív egész számokat, amelyekre igaz, hogy számjegyeik összege és szorzata is 9^{2007}. Igazoljuk, hogy egyetlen megfelelő szám számjegyeinek száma sem lehet négyzetszám.

Megoldás. A „szorzat” feltétel alapján bármely megfelelő szám számjegyei csak 1, 3, 9 értékűek lehetnek.

A 3-asok száma csak páros lehet, mert 9^{2007} 3-nak páros kitevőjű hatványa. 1 pont

Legyen tehát egy megfelelő számban a 3-asok száma $2k$, ahol $0 \leqq k \leqq 2007$.

A feladat feltételei alapján ekkor a 9-esek száma $2007 - k$, az „összeg” feltétel alapján pedig az 1-esek száma

$$9^{2007} - 3 \cdot 2k - 9 \cdot (2007 - k) = 9^{2007} + 3k - 18\,063.$$ 1 pont

A számjegyek száma így:

$$K = 2k + 2007 - k + 9^{2007} + 3k - 18\,063 = 9^{2007} + 4k - 16\,056.$$ 1 pont

A $0 \leqq k \leqq 2007$ feltétel miatt ekkor $9^{2007} - 16\,056 \leqq K \leqq 9^{2007} - 8028$.

De $\left(3^{2007} - 1\right)^2 < 9^{2007} - 16\,056$, hiszen $16\,057 < 2 \cdot 3^{2007}$, 1 pont
és $9^{2007} - 8028 < \left(3^{2007}\right)^2$, így

$$\left(3^{2007} - 1\right)^2 < K < \left(3^{2007}\right)^2.$$ 2 pont

Tehát K (a számjegyek száma) minden esetben két szomszédos négyzetszám közé esik, ami azt jelenti, hogy nem lehet négyzetszám. 1 pont

Összesen: 7 pont

5. Egy kör kerületét 10 darab piros és 12 darab kék pont ívekre bont. Ezekre az ívekre számokat írunk a következő módon: két piros pont közötti ívre 2-t, két kék pont közötti ívre $\frac{1}{2}$-et, egy piros és egy kék közti ívre 1-et.

Mennyi lehet ezeknek a számoknak a szorzata a piros és kék pontok különböző elrendezése esetén?

Megoldás. Vizsgáljuk meg, hogyan változik a számok szorzata, ha két különböző színű pontot felcserélünk. Ekkor a felcserélt pontok előtti, közötti és őket követő ívre írt szám változhat. Felcserélünk egy piros és egy kék pontot. A következő esetek lehetségesek aszerint, hogy a piros pont előtt és a kék pont után milyen színű pont állt:

eredetileg	szorzat	felcserélve	szorzat
p, p, k, p	2	p, k, p, p	2
$p, p, k, k,$	1	$p, k, p, k,$	1
k, p, k, p	1	k, k, p, p	1
k, p, k, k	$\frac{1}{2}$	k, k, p, k	$\frac{1}{2}$

4 pont

A szorzat minden esetben változatlan maradt.

Sorozatos cserék révén elérhetjük, hogy az azonos színű pontok egymás mellett legyenek, és csak két helyen legyen szomszédos két különböző színű pont. 2 pont

Ekkor a szorzat értéke

$$2^9 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{11} = \frac{1}{4}.$$ 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: n piros és k kék pont esetén a szorzat értéke 2^{n-k}.