Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2008/2009-es tanév
3. (döntő) forduló
haladók II. kategória

Feladatok

1. Legyen p egy tetszőleges természetes szám. Határozzuk meg az

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=p$$

egyenlet összes nullától különböző és páronként relatív prím x, y, z egészekből álló megoldását!

2. Az ABC hegyesszögű háromszög oldalai egész szám egység hosszúak. A háromszögbe legalább két olyan egyenlő kerületű téglalap is írható, amelyeknek két csúcsa az AB oldal, másik két csúcsa pedig a másik két oldal egy-egy pontja. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög területének kétszerese négyzetszám.

3. Legyen k természetes szám. A $36k^2+268k+2009$-et szeretnénk n darab páratlan négyzetszám összegeként felírni.

$a)$ Bizonyítsuk be, hogy ez $2 \leqq n \leqq 8$ esetén nem lehetséges.

$b)$ Mutassuk meg, hogy $n=9$-re mindig van megoldás.

Az eredményhirdetést 2009. május 29-én (pénteken) 14.00 órai kezdettel tartjuk az MTA Rényi Alfréd MKI Nagytermében (Budapest, V. ker., Reáltanoda u. 13–15.).