Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási és Kulturális Minisztérium
Támogatáskezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2008/2009-es tanév
1. forduló
haladók III. kategória

Feladatok

1. Az (a_n) számsorozatra $n \geqq 1$ esetén $a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + 3)$ teljesül. Mi lehet a_1 lehető legkisebb értéke, ha a sorozat első 2009 darab tagja pozitív egész szám, az összes többi tagja pedig nem az?

2. Egy egységnégyzetbe írt téglalap csúcsai a négyzet különböző oldalainak belső pontjai. Bizonyítsuk be, hogy ha a téglalap területe legalább $\frac{1}{2}$, akkor a téglalap négyzet.

3. Definiáljuk az f függvényt a pozitív egészek körében a következőképpen:

$$f(1) = 2009 \text{ és}$$

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) = n^2 f(n).$$

Adjuk meg $f(2009)$ pontos értékét!

4. Az ABC háromszög beírt köre az AB, BC, CA oldalakat rendre az F, D, E pontokban érinti. Az AFE, BDF és CED háromszögek beírt körének középpontja rendre A_1, B_1 és C_1.

a) Bizonyítsuk be, hogy A_1, B_1 és C_1 rajta vannak az ABC beírt körén!

b) Bizonyítsuk be, hogy az A_1D, B_1E és C_1F szakaszok átmennek az $A_1B_1C_1$ háromszög magasságpontján!

5. Van 25, nem feltétlenül azonos tömegű csokidarabunk. Egyetlen darabot megfelelően kettévágva el tudjuk-e osztani a csokoládét két gyerek között úgy, hogy darabra és tömegre is azonos mennyiséget kapjanak?