Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2011/2012-es tanév
3. (döntő) forduló
haladók II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Keressük meg az összes olyan kilencjegyű pozitív egész számot, melyben minden számjegy 1-től 9-ig csak egyszer szerepel, és az első, i darab számjegyből képzett i jegyű szám osztható i-vel $(i = 1, \dots, 9)$!

Megoldás. Jelöljük a számunkat az $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_8a_9$-cel.

Az öttel oszthatóság miatt $a_5 = 5$. 1 pont

A páros sorszámú helyen lévő számok a_2, a_4, a_6, a_8 szükségszerűen párosak, így a páratlan sorszámú helyeken lévő számok páratlanok lesznek.

Az $a_1a_2a_3a_4$ néggyel osztható. A néggyel való oszthatósági szabályok szerint elég az utolsó két jegyet nézni. De mivel a_3 páratlan, így $a_4 = 2$ vagy $a_4 = 6$ lehet csak.

Hasonlóan a nyolccal való oszthatóságot vizsgálva kapjuk, hogy $a_6a_7a_8$ nyolccal osztható. De mivel a_6 páros, ezért elég az a_7a_8-nak nyolccal oszthatónak lennie. Mivel a_7 páratlan, ezért $a_8 = 2$ (ha $a_7 = 3$ v. 7) vagy $a_8 = 6$ (ha $a_7 = 1$ v. 5 v. 9) lehet.

Így a_2 és a_6 csak 4 vagy 8 lehet. 2 pont

$a_1a_2a_3$ hárommal, $a_1a_2a_3a_4a_5a_6$ hattal osztható, ezért $a_4a_5a_6$ is osztható hárommal.

Amennyiben $a_2 = 4$, akkor $a_6 = 8$, a_1 és a_3 1 és 7 lehet, $a_4 = 2$, így $a_6 = 8$, $a_8 = 6$, $a_7 = 3$ vagy 9.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
1	**4**	7	**2**	**5**	**8**	3	6	9
7	**4**	1	**2**	**5**	**8**	3	6	9
1	**4**	7	**2**	**5**	**8**	9	6	3
7	**4**	1	**2**	**5**	**8**	9	6	3

De az első két eset nem lehet, mert ha $a_7 = 3$, akkor a_8 csak 2 lehet.

A második két esetben az első 7 számjegyből alkotott szám nem osztható 7-tel. 2 pont

Ha $a_2 = 8$, akkor $a_6 = 4$, ekkor $a_4 = 6$, $a_8 = 2$. Így $a_7 = 3$ vagy 7 lehet. a_1 és a_3 pedig 1 vagy 3, 9 vagy 1, 7 vagy 9, 7 vagy 3. 1 pont

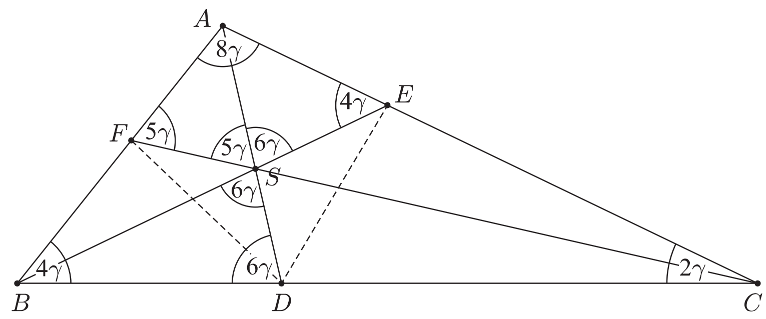
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
1	**8**	9	**6**	**5**	**4**	3	**2**	7
9	**8**	1	**6**	**5**	**4**	3	**2**	7
7	**8**	9	**6**	**5**	**4**	3	**2**	1
9	**8**	7	**6**	**5**	**4**	3	**2**	1
1	**8**	3	**6**	**5**	**4**	7	**2**	9
3	***8***	*1*	***6***	***5***	***4***	*7*	***2***	*9*
1	**8**	9	**6**	**5**	**4**	7	**2**	3
9	**8**	1	**6**	**5**	**4**	7	**2**	3

A fenti számok első 7 számjegyeiből alkotott számokat héttel osztva csak a 381 654 729 osztható 7-tel is, így az egyetlen szám, amire az állítás feltételei teljesülnek, az a 381 654 729. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Az ABC háromszögben $\alpha = 2\beta = 4\gamma$. A belső szögfelezők az a, b és c oldalt rendre a D, E és F pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy $DE = DF$!

Megoldás.



Legyen S az ABC háromszög szögfelezőinek metszéspontja. Jelöljük az ABC háromszög szögeit $ACB\sphericalangle = 2\gamma$, $CBA\sphericalangle = 4\gamma$, $BAC\sphericalangle = 8\gamma$-val. Ekkor mivel a háromszög belső szögeinek összege 180°, ezért tudjuk, hogy $14\gamma = 180^\circ$. Ezt felhasználva az ABE háromszögből $AEB\sphericalangle = 4\gamma$, $ASE\sphericalangle = BSD\sphericalangle = 6\gamma$, $AFS\sphericalangle = 5\gamma = ASF\sphericalangle$. 1 pont

Legyen $AS = x$ és $SD = y$. ASF és ASE háromszögek egyenlőszárúak, mert van két azonos szögük, így $AF = AS = SE = x$.

BAD és BSD háromszögek is egyenlőszárúak, ezért $AD = x + y = BD = BS$. 1 pont

BAD háromszögre felírjuk a szögfelező tételt: $\dfrac{AB}{AS} = \dfrac{DB}{DS}$. 1 pont

$$BF = AB - AF = \left(\frac{DB}{DS} - \frac{AF}{AS}\right) \cdot AS = \left(\frac{x+y}{y} - x\right) \cdot x = \frac{x^2}{y}.$$ 1 pont

ABE háromszögben a szögfelező tétel $\dfrac{EA}{ES} = \dfrac{BA}{BS}$. Ebből

$$EA = \frac{BA}{BS} \cdot ES = \left(\frac{AF + FB}{BS} \right) \cdot ES = \frac{x + \dfrac{x^2}{y}}{x + y} \cdot x = \frac{x^2}{y}.$$ 2 pont

Azaz EAD és FBD háromszögek egybevágóak, mivel két oldaluk: $BD = AD = x + y$, $BF = EA$ és a közbezárt szögük megegyezik. Így $DE = DF$. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Hány olyan pozitív egész számokból álló $(x; y)$ számpár van, amely kielégíti az

$a)$ $x^2 - y^2 = 2012^{2011}$,

$b)$ $x^2 + y^2 = 2012^{2011}$

egyenletet?

Megoldás. $a)$ $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ és $2012^{2011} = 2^{4022} \cdot 503^{2011}$, ahol 503 prímszám.

2012^{2011} összes pozitív osztójának száma $4023 \cdot 2012$, ezért pontosan ugyanennyi osztópárja van 2012^{2011}-nek.

Az $x - y$ és $x + y$ kifejezés egész számok esetén azonos paritású, ezért az osztópárok tagjai között nem lehet páratlan szám. 1 pont

2012^{2011} páratlan osztói: 1, 503, 503^2, 503^3, $\ldots$, 503^{2011}, azaz 2012 darab páratlan osztó van.

A 2012^{2011} páratlan számot tartalmazó osztópárjainak száma tehát $2 \cdot 2012$.

Mivel $x - y < x + y$, ezért az $(x - y; x + y)$ megfelelő osztópárok száma

$$\frac{4023 \cdot 2012 - 2 \cdot 2012}{2} = \frac{4021 \cdot 2012}{2} = 4021 \cdot 1006 = 4\,045\,126.$$ 1 pont

Nyilvánvaló, hogy mind a 4 045 126 darab megoldás meg is felel a feladat feltételeinek. 1 pont

$b)$ Ha $x^2 + y^2 = 2012^{2011}$, akkor x és y is csak páros szám lehet.

Ennek megfelelően legyen $x = 2^s \cdot x_1$, $y = 2^t \cdot y_1$, ahol $1 \leqq s \leqq t$, $s, t \in \mathbb{Z}^+$ és x_1, y_1 páratlan szám.

Egyenletünk alapján $2^{2s} \cdot x_1^2 + 2^{2t} \cdot y_1^2 = 2012^{2011} = 2^{4022} \cdot 503^{2011}$.

Ha $s = t$, akkor $2^{2s}\left(x_1^2 + y_1^2\right) = 2^{4022} \cdot 503^{2011}$.

Mivel $x_1^2 + y_1^2$ két páratlan szám négyzetének összege, ezért az összeg $4k + 2$ alakú, ahol $k \in \mathbb{Z}$.

Mivel $4k + 2 = 2(2k + 1)$, ahol $2k + 1$ páratlan szám, ezért a bal oldal 2-nek páratlan kitevőjű (maximális) hatványával osztható ($2s + 1$ a kitevő), a jobb oldal pedig 2-nek páros kitevőjű hatványával osztható (4022 a kitevő). Ez pedig lehetetlen, tehát nincs megoldás. 2 pont

Ha $s < t$, akkor $2^{2s} \cdot x_1^2 + 2^{2t} \cdot y_1^2 = 2^{4022} \cdot 503^{2011}$ alapján

$$2^{2s}\left(x_1^2 + 4^{t-s} \cdot y_1^2\right) = 2^{4022} \cdot 503^{2011}.$$

A zárójeles kifejezés értéke páratlan szám, mert $t > s$. Ekkor pedig csak $s = 2011$ lehet.

Így viszont $x_1^2 + 4^{t-s} \cdot y_1^2 = 503^{2011}$.

Az x_1 szám páratlan, ezért az utóbbi egyenlőség bal oldalának 4-es maradéka 1. Viszont 503^{2011} 4-es maradéka $(-1)^{2011} = -1$, ami azt jelenti, hogy ebben az esetben sincs megoldás. 1 pont

Tehát az $x^2 + y^2 = 2012^{2011}$ egyenletnek nincs gyöke a pozitív egész számok körében. 1 pont

Összesen: 7 pont