

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2011/2012-es tanév

3. (döntő) forduló

kezdők I. kategória

Feladatok

1. Az $ABCD$ téglalap BC oldala 2 egység hosszúságú. Jelölje a BC oldal felezőpontját G , a CD oldal C csúcsához közelebbi harmadoló pontját E . Mekkora az AB oldal, ha az EAG szög 30° ?

2. Egy háromszög oldalai a szokásos jelölésekkel a , b és c , a velük szemközti szögek rendre α , β és γ . Mekkora lehetnek a háromszög szögei, ha tudjuk, hogy a β kétszerese az α szögnek és az oldalak között fennáll az $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} = \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}$ összefüggés?

3. Pisti a következő játékot játssza. Először felír a táblára egy pozitív egész számot. Ezután minden lépésben letörli a táblán levő számot, s helyette, ha páros volt, akkor a szám felét, ha páratlan volt, akkor a nála 7-tel nagyobb számot írja fel. Jelöljük A -val, B -vel, illetve C -vel azon pozitív egész számok halmazát, melyekből kiindulva Pisti megkaphatja az 1, 3, illetve 7 számokat (a játékot utána is folytatja, miután ezek valamelyikét megkapta).

a) Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész szám az A , B , C halmazok közül pontosan az egyiknek eleme.

b) Hány 1 000 000-nál kisebb eleme van A -nak, B -nek, illetve C -nek?