Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2012/2013-as tanév
3. (döntő) forduló
Haladók II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Igazoljuk, hogy ha n egész szám, akkor az $\dfrac{n^4+4n^2+3}{n^4+10n^2+16}$ tört nem egyszerűsíthető.

Megoldás. Alakítsuk szorzattá a számlálót és a nevezőt:

$$\frac{n^4+4n^2+3}{n^4+10n^2+16} = \frac{(n^2+1)\cdot(n^2+3)}{(n^2+2)\cdot(n^2+8)}.$$ 1 pont

(n^2+2) szomszédja mind (n^2+1)-nek, mind (n^2+3)-nak, így 1-nél nagyobb közös osztójuk nincs, tehát nem lehet egyszerűsíteni (n^2+2) egyik osztójával sem. 2 pont

Tehát azt kell csak vizsgálni, lehet-e (n^2+8) valamelyik osztójával egyszerűsíteni.

1. eset:

Ha $d \neq 1$ és $d \mid (n^2+8)$, és $d \mid (n^2+3)$, akkor $d \mid \big[(n^2+8)-(n^2+3)\big]$, tehát $d \mid 5$, azaz $d=5$.

De egy négyzetszám sosem végződik 2-re vagy 7-re, így (n^2+8) nem végződhet sem 0-ra, sem 5-re, így nem lehet osztója az 5. 2 pont

2. eset:

Ha $d \neq 1$ és $d \mid (n^2+8)$, és $d \mid (n^2+1)$, akkor $d \mid \big[(n^2+8)-(n^2+1)\big]$, tehát $d \mid 7$, azaz $d=7$.

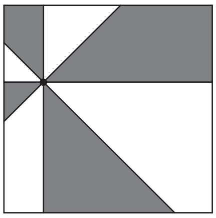
Ha $n=7k$, $7k\pm1$, $7k\pm2$, vagy $7k\pm3$, akkor $n^2+1=7M+1$, $7M+2$, $7M+5$, vagy $7M+3$ alakú és így (n^2+1) nem osztható 7-tel.

Tehát a tört nem egyszerűsíthető. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Egy négyzet tetszőleges belső pontja P, amin keresztül párhuzamosokat húzunk a négyzet oldalaival és átlóival. Ezek az egyenesek nyolc részre vágják a négyzetet. Bizonyítsuk be, hogy a keletkezett részek két olyan csoportba oszthatók, amelyekben a részek területének összege egyenlő.

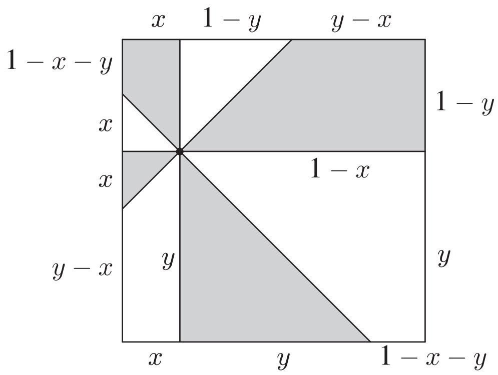
Megoldás.



Néhány vázlatrajz tanulmányozása után egyértelművé válik, hogy az ábrán látható színezés adja a megfelelő csoportosítást, vagyis a körüljárás szerinti minden második darab tartozik egy csoportba. 1 pont

Amennyiben P a négyzet valamelyik szimmetriatengelyére esik, akkor nyilvánvaló az állítás, hiszen minden „színezett” darabnak van egy „színezetlen” egybevágó párja. 1 pont

Az általános eset vizsgálatához feltesszük, hogy a négyzet oldala egységnyi, a P pont helyzetét pedig egy x és egy y változóval írjuk le, az alábbi ábra szerint. A jelölt szakaszok felírásához csupán azt kell használnunk, hogy (a) a téglalap szemközti oldalai egyenlők; (b) a 45°-os derékszögű háromszög befogói egyenlők.



3 pont

A szürkével jelölt terület háromszögekből és derékszögű trapézokból áll:

$$T = \frac{(1-x-y)+(1-y)}{2} \cdot x + \frac{(y-x)+(1-x)}{2} \cdot (1-y) + \frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2}$$

$$2T = (2-x-2y)x + (1+y-2x)(1-y) + y^2 + x^2$$

$$2T = 2x - x^2 - 2xy + 1 - y^2 - 2x + 2xy + x^2 + y^2$$

$$2T = 1.$$

Beláttuk tehát, hogy a szürke részek területének összege $\frac{1}{2}$, a négyzet területének fele. 2 pont

Összesen: 7 pont

3. Egy n sorból, és 7 oszlopból álló ($n \times 7$-es) táblázatot szeretnék kitölteni a következő módon:

– Minden sorban az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számok kell, hogy szerepeljenek valamilyen sorrendben (természetesen a sor valamennyi mezőjébe pontosan egy szám kerül).

– Bármely két sornak legalább egy helyen/egy mezőben különböznie kell.

– Bármely két sor legalább egy helyen meg kell egyezzen.

Legfeljebb mennyi lehet n?

Megoldás. Bármely sorban az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számok egy permutációja szerepel, ezek száma: 7! $(= 5040)$. 1 pont

Tekintsünk egy olyan adott $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$ permutációt, mely ott van a táblázatban.

A következő hat permutáció (az eredeti „ciklikusan eltoltjai") ekkor nem szerepelhet a táblázatban:

$$\begin{gathered} a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_1 \\ a_3a_4a_5a_6a_7a_1a_2 \\ a_4a_5a_6a_7a_1a_2a_3 \\ a_5a_6a_7a_1a_2a_3a_4 \\ a_6a_7a_1a_2a_3a_4a_5 \\ a_7a_1a_2a_3a_4a_5a_6, \end{gathered}$$

hiszen bármelyik permutáció az összes helyen különbözik az eredetitől. 2 pont

Ha a két különböző
(első) $a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7$, és
(második) $b_1b_2b_3b_4b_5b_6b_7$ permutáció
szerepel a táblázatban, azok hat-hat „ciklikus eltoltja" 12 különböző permutáció, ugyanis, ha lenne az első permutáció ciklikus eltoltjai között olyan, amelyik megegyezik a második permutáció egy ciklikus eltoltjával, akkor a második permutáció is az első egy ciklikus eltoltja lenne, s így nem lehetne a táblán. 1 pont

De akkor a lehetséges 7! permutáció összesen 6! $(= 720)$ darab olyan 7-es csoportra osztható, hogy egy-egy csoporton belül legfeljebb egy permutáció kerülhet a táblára; vagyis *n legfeljebb* 720 *lehet.* 1 pont

És ez el is érhető. Például írjuk fel a táblára az összes olyan permutációt pontosan egyszer, amelyek 1-essel kezdődnek.

Ezek száma 6!, és nyilván teljesülnek rájuk a feladat követelményei.

Vagyis n maximális értéke $n = 6! = 720$. 2 pont

Összesen: 7 pont