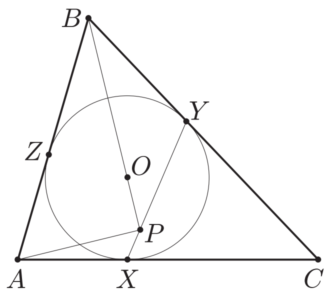
**Bolyai János**
**Matematikai Társulat**

# Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
# 2012/2013-as tanév
# 2. (döntő) forduló
# Haladók III. kategória

### Megoldások és javítási útmutató

**1.** Az $ABC$ háromszög beírt köre az $AC$ és $BC$ oldalakat az $X$ és $Y$ pontokban érinti. A $B$-ből induló belső szögfelező az $XY$ szakaszt $P$-ben metszi. Mekkora az $APB\sphericalangle$?

**Megoldás.**

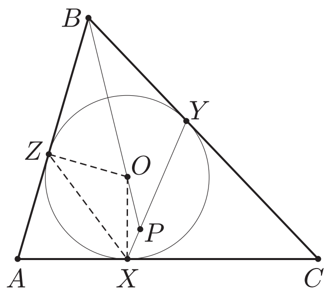



Ábrát készítünk, amin felhasználjuk, hogy a feladat állítása szerint a $B$-ből induló szögfelező metszi az $XY$ *szakaszt*. Legyen a beírt kör középpontja $O$ (ezen áthalad a $B$-ből induló szögfelező), és jelölje $Z$ a beírt kör $AB$-n fekvő érintési pontját.

Az ábra alapján az a sejtésünk, hogy $APB\sphericalangle = 90°$, ezt fogjuk bizonyítani. 1 pont

Ha a metszéspont egybeesik $X$-szel, akkor $ABC$ egyenlő szárú ($AB = BC$), és így nyilván a $B$-ből induló belső szögfelező merőleges az $AC$ oldalra. 1 pont

A bizonyítás lényege annak megmutatása, hogy az $A$, $X$, $P$, $O$, $Z$ pontok egy $AO$ átmérőjű körön vannak. Thalész tétele miatt innen következik a feladat állítása. 1 pont




A szokásos módon jelölve a háromszög szögeit a következőket írhatjuk fel:

Az $XCY$ egyenlő szárú háromszögből

$$CXY\sphericalangle = 90° - \frac{\gamma}{2},$$

az $AXZ$ egyenlő szárú háromszögből pedig

$$AXZ\sphericalangle = 90° - \frac{\alpha}{2}.$$

Innen

$$ZXP\sphericalangle = 180° - \left(90° - \frac{\gamma}{2}\right) - \left(90° - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\alpha + \gamma}{2}.$$

Azt is tudjuk, hogy $ZBP\sphericalangle = \beta/2$, ezért a $ZXPB$ négyszögben az $X$-nél és $B$-nél lévő szögek összege $90°$, tehát a $Z$-nél és $P$-nél lévő szögek összege $270°$. Viszont $OZB = 90°$ (érintő), ezért $XPO\sphericalangle + XZO\sphericalangle = 270° - 90° = 180°$, vagyis $XPOZ$ húrnégyszög. 2 pont

Thalész tétele miatt $AXOZ$ is húrnégyszög, $AO$ átmérővel, tehát beláttuk, hogy $A$, $X$, $P$, $O$ és $Z$ egy $AO$ átmérőjű körön vannak, így $APO\sphericalangle = APB\sphericalangle = 90°$. 2 pont

Összesen: 7 pont

*Megjegyzés:* A feladat állítása akkor is igaz marad, ha a szögfelező az $XY$ szakasz meghosszabbítását metszi.

**2.** 2013 valós számra fennáll:

$$a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \ldots \geqq a_{2012} \geqq a_{2013} \geqq 0, \quad \text{valamint}$$

$$a_{34}^2 + a_{35}^2 + \ldots + a_{2013}^2 \geqq \frac{61}{4}.$$

Igazoljuk, hogy $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2012} + a_{2013} \geqq \sqrt{2013}$!

Lehet-e a fenti 2013 tagú összeg pontosan $\sqrt{2013}$?

**1. megoldás.** Az $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{2012} + a_{2013}$ összeget nevezzük el $S$-nek!

$S$ első 33 tagjára, és a maradék tagokra is egy-egy alsó becslést fogunk adni.

**(1)** $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{33} \geqq 33 \cdot a_{33}$ a tagok monoton csökkenése miatt. 1 pont

A $\frac{61}{4} \leqq a_{34}^2 + a_{35}^2 + \ldots + a_{2013}^2$ egyenlőtlenség jobb oldalán lévő valamennyi $a_k^2$ tagot cseréljünk ki a nála (ugyancsak a tagok monoton csökkenése miatt) nem kisebb $a_{33} \cdot a_k$ taggal.

Ekkor nyerjük:

$$\frac{61}{4} \leqq a_{34}^2 + a_{35}^2 + \ldots + a_{2013}^2 \leqq a_{33} \cdot (a_{34} + a_{35} + \ldots + a_{2013}).$$

Ezt az egyenlőtlenséget osztva a pozitív $a_{33}$-mal kapjuk ($a_{33}$ nyilván pozitív, különben $a_{34}$, és utána az összes tag is mind 0 lenne ellentmondásban azzal, hogy a négyzetösszegük nagyobb 61/4-nél.):

**(2)** $$\frac{61}{4 \cdot a_{33}} \leqq a_{34} + a_{35} + \ldots + a_{2013}.$$ 2 pont

**(1)** és **(2)** alapján:

$$S = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{33}) + (a_{34} + \ldots + a_{2012} + a_{2013}) \geqq 33 \cdot a_{33} + \frac{61}{4 \cdot a_{33}}.$$

Itt a kéttagú számtani, mértani közepek közötti összefüggést használva

$$S \geqq 33 \cdot a_{33} + \frac{61}{4 \cdot a_{33}} \geqq 2 \cdot \sqrt{33 \cdot a_{33} \cdot \frac{61}{4 \cdot a_{33}}} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{\frac{33 \cdot 61}{4}} = \sqrt{33 \cdot 61} = \sqrt{2013}.$$

Vagyis $S$ valóban legalább $\sqrt{2013}$. 2 pont

Akkor van egyenlőség, ha az összes helyen, ahol becsültünk egyenlőség van.

A „számtani–mértani közepes becslés” miatt $33 \cdot a_{33} = \dfrac{61}{4 \cdot a_{33}}$, s innen

$$a_{33} = \sqrt{\frac{61}{4 \cdot 33}} = \sqrt{\frac{61}{132}}.$$ 1 pont

Az **(1)** becslés miatt $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{33}$ az első 33 tagra.

Míg a **(2)** becslés miatt valamennyi ($k > 33$) tagra $a_k^2 = a_k \cdot a_{33}$.

Ez utóbbi csak úgy lehet, ha $a_k = 0$, vagy $a_k = a_{33}$.

Mivel most

$$a_{34}^2 + a_{35}^2 + \ldots + a_{2013}^2 = \frac{61}{4} = 33 \cdot \sqrt{\frac{61}{4 \cdot 33}}^{\,2} = 33 \cdot a_{33}^2,$$

ez a tagok nem csökkenése miatt azt jelenti, hogy $a_{34} = a_{35} = \ldots = a_{66} = a_{33}$, és a többi tag: 0.

Vagyis: pontosan

$$a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_{33} = \ldots = a_{66} = \sqrt{\frac{61}{132}}, \quad \text{és} \quad a_{67} = a_{68} = \ldots = a_{2013} = 0$$

esetén teljesül az egyenlőség. 1 pont

---

Összesen: 7 pont

**2. Megoldás** (*Janzer Barnabás dolgozata alapján*).

Először „észrevesszük”, hogy $a_1 = a_2 = \ldots = a_{66} = \sqrt{\frac{61}{132}}$, és $a_{67} = a_{68} = \ldots = a_{2013} = 0$ esetén egyenlőség teljesül, vagyis $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2013} = \sqrt{2013}$.

Ezután megmutatjuk, hogy minden más esetben tudjuk úgy módosítani az $a_i$ számokat, hogy a feltételek érvényesek maradjanak, a számok összege ne nőjön, és végül legalább $\sqrt{2013}$ legyen.

Tervünk a következő: az $a_{34}, a_{35}, \ldots$ számokat úgy változtatjuk, hogy négyzetösszegük ne változzon, és a kis indexűek $a_{34}$-hez, a nagy indexűek pedig 0-hoz közeledjenek. A következő lemma alapján ez a módosítás nem növeli (általában csökkenti) a számok összegét.

**Lemma:** *Ha $x \geqq y \geqq 0$, és $x$-et megnöveljük, $y$-t pedig csökkentjük (de legfeljebb nulláig) úgy, hogy az új számok négyzetösszege megegyezzen az $x^2 + y^2$ összeggel, akkor a kapott számok összege nem nagyobb, mint $x + y$.*

**Bizonyítás:** Feltehetjük, hogy $x \geqq y > 0$. Legyen $a, b > 0$ és $x^2 + y^2 = (x + a)^2 + (y - b)^2$. Innen $2yb - 2xa = a^2 + b^2 > 0$, vagyis $yb > xa$. Ez csak úgy lehetséges, ha $b > a$, hiszen $y \leqq x$. Tehát $x + a + y - b = x + y - (b - a) > x + y$.

A folytatásban $a_{34}$-et rögzítjük. A 34-nél kisebb indexű számokat $a_{34}$-re csökkenthetjük, ezzel nem sértjük meg egyik feltételünket sem, és a számok összege nem nő. A 34-nél nagyobb indexű elemeknél pedig ismételten alkalmazzuk a lemmánkat, a következő módon:

Először az $(a_{35}, a_{2013})$ párt „toljuk” szét, ha lehetséges. A széttolás azt jelenti, amit a lemmában végeztünk a számpárral. Ha $a_{35}$ értéke eléri $a_{34}$-et, vagy $a_{2013}$ eléri nullát, megállunk. Ezután mindig vesszük a legkisebb indexű olyan elemet, ami kisebb $a_{34}$-nél, és a legnagyobb indexűt, ami pozitív, és velük folytatjuk a „széttolást”. Így a négyzetösszeg nem változik, a számok összege nem nő (általában csökken), és előbb-utóbb eljutunk a következő állapotba:

$$\underbrace{x, x, \ldots, x}_{33 \text{ db}}, \underbrace{x, x, \ldots, x}_{n \text{ db}}, \underbrace{y}_{a_{34+n}}, 0, 0, \ldots, 0, \qquad (x \geqq y).$$

Az persze előfordulhat, hogy a számsor végén nincsenek nullák.

Ha még az is igaz lenne, hogy $y = 0$, akkor kész lennénk, hiszen ebben az esetben $n \cdot a_{34}^2 = \dfrac{61}{4}$, vagyis $a_1 = \ldots = a_{33} = a_{34} = \ldots = a_{34+n-1} = \sqrt{\dfrac{61}{4n}}$. Ekkor

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2013} = (33+n) \cdot \sqrt{\frac{61}{4n}} = n \cdot \sqrt{\frac{61}{4n}} + 33 \cdot \sqrt{\frac{61}{4n}} \geqq 2 \cdot \sqrt{33n \sqrt{\frac{61}{4n}}^2} = \sqrt{2013}.$$

A megoldás utolsó része tehát arra irányul, hogy megmutassuk, eljuthatunk az $y = 0$ állapotba úgy, hogy a feltételek nem sérültek, és a számok összege nem nőtt. Két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy $a_{34}$-től kezdve „elég sok” egyenlő elem van-e.

$n \geqq 33$: Az $y$ számot nullára csökkentjük, az $a_1 = \ldots = a_{33+n}$ számokat pedig $x + \dfrac{y}{33+n}$-re növeljük. Az elemek összege nem változott, a négyzetösszegről megmutatjuk, hogy nem csökkent, vagyis nem sérült a feltétel.

Azt szeretnénk látni, hogy $nx^2 + y^2 \leqq n\left(x + \dfrac{y}{33+n}\right)^2$. A zárójel felbontása, $y > 0$-val egyszerűsítés és $(n+33)$-mal való szorzás után ez így néz ki: $y(n+33) \leqq 2nx + \dfrac{y}{n+33}$. Ez pedig igaz, hiszen ($n + 33 \leqq 2n$ miatt)

$$y(n+3) < x(n+33) \leqq 2nx < 2nx + \frac{y}{n+33}.$$

Így már csupa egyenlő pozitív számunk van, amelyeket egyenlő mértékben csökkentve a számok összege csökken, a kérdéses számok négyzetösszege pedig 61/4-re csökkenthető.

$n < 33$: Most az $a_1, a_2 \ldots, a_{34+n}$ számokat helyettesítjük átlagukkal $\left(\dfrac{(33+n)x+y}{34+n}\right)$, és megmutatjuk, hogy így a feltételben szereplő négyzetösszeg nem csökkent. Az nyilvánvaló, hogy az összeg nem változott. A következőt kell belátnunk:

$$nx^2 + y^2 \leqq (n+1) \cdot \left(\frac{(33+n)x+y}{34+n}\right)^2.$$

Rövid számolás következik:

$$nx^2 + y^2 \leqq (n+1) \cdot \left( \frac{(33+n)x + y}{34+n} \right)^2 = (n+1) \cdot \left( x - \frac{x-y}{n+34} \right)^2$$

$$y^2 \leqq -2nx\frac{x-y}{n+34} + n \cdot \left( \frac{x-y}{n+34} \right)^2 + x^2 - 2x\frac{x-y}{n+34} + \left( \frac{x-y}{n+34} \right)^2.$$

A jobboldalról elhagyva a (nemnegatív) négyzetes tagokat, elég lenne belátni, hogy

$$y^2 \leqq -2nx\frac{x-y}{n+34} + x^2 - 2x\frac{x-y}{n+34}.$$

Beszorzás után:

$$ny^2 + 34y^2 \leqq x^2(32-n) + x \cdot (2ny + 2y).$$

$32 - n \geqq 0$ és $x > y$ miatt elég lenne:

$$ny^2 + 34y^2 \leqq y^2(32-n) + y \cdot (2ny + 2y) = ny^2 + 34y^2,$$

ami azonosság. Tehát ebben az esetben is egyenlővé tudtuk tenni a számsor pozitív tagjait a feltételek megsértése nélkül, és közben a számok összege nem nőtt. Érdemes megjegyezni, hogy az előző egyenlőtlenség mindegyik gyengítése az $x > y$ reláción múlott.

Összefoglalva: mindkét esetben eljutottunk egy olyan helyzetbe, hogy $a_1 = a_2 = \ldots = a_{34+n} = x > 0$ és $a_{34+n+1} = \ldots = a_{2013} = 0$, továbbá teljesül, hogy a számok összege az átalakítás során nem nőtt (általában csökkent), és $a_{34}^2 + \ldots + a_{2013}^2 = \frac{61}{4}$. Az ilyen számsorról pedig korábban bebizonyítottuk, hogy összege legalább $\sqrt{2013}$.

**3.** Artúr király udvarába hivatalos vendégségbe néhány lovag. Bármely két lovag vagy barát, vagy ellenség (a viszonyok kölcsönösek, és az idő múlásával nem változnak).

Egy korábbi vendégség során ugyanezek a lovagok le tudtak ülni két asztal mellé úgy, hogy az egy asztalnál ülők mind barátai voltak egymásnak.

A mostani vendégség során a vendégek egyesével érkeztek meg. Érkezésük után minden érkező leült az egyik olyan asztalhoz, ahol nem ült ellensége; az ilyen asztalok közül azt választva, ahol a legtöbb barátja ült (ha egyetlen megfelelő asztal sem volt, akkor az érkező természetesen új asztalhoz ült). Így összesen 12 asztal mellé ültek le lovagok.

Legalább hány lovag érkezett a vendégségbe?

**Megoldás.** A feladatot átfogalmazzuk gráfnyelvre.

A gráf csúcsai a lovagok lesznek, és két csúcs pontosan akkor lesz összekötve, ha a nekik megfelelő lovagok ellenségek. A gráf csúcsai kiszínezhetők két színnel úgy, hogy éllel összekötött csúcsok ne kapjanak azonos színt (*korábban két asztal mellé* ...). (A gráfom páros gráf.) A felső színosztálybeli (a továbbiakban $F$*-beli*) csúcsok (*első asztalnál lévő lovagok*) legyenek $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_m$, míg az alsó ($A$*-beli*) színosztálybeliek (*második asztal*): $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$. Élek azonos színosztályon belül természetesen nem mennek. 1 pont

Először megmutatjuk, hogy $m + n$ (*a lovagok száma*) lehet 22. Legyen $n = m = 11$, és a következő csúcsok legyenek éllel összekötve: $A_j$ $(1 \leqq j \leqq 10)$ csúcs legyen összekötve az összes $F_k$ $(1 \leqq k \leqq 11)$ csúccsal, kivéve $F_j$-t. Míg $A_{11}$ csúcs legyen összekötve (kivétel nélkül) az összes $F_k$ csúccsal. (Ez a definíció már egyértelműen leírja, hogy a felső csúcsok mely alsó csúcsokkal vannak összekötve.)

Vagyis a gráfom egy „majdnem teljes páros gráf”, pontosan a 10 darab $A_j - F_j$ $(1 \leqq j \leqq 10)$ él hiányzik belőle. Most jöjjenek a „lovagok” az $A_1 - F_1 - A_2 - F_2 - A_3 - \ldots - A_{10} - F_{10} - -A_{11} - F_{11}$ sorrendben.

A gráf definíciója alapján

– az első két lovag $(A_1, F_1)$ az első asztalhoz ül,

– a „második két” lovag $(A_2, F_2)$ a második asztalhoz (hiszen mindkettőjüknek van ellensége az első asztalnál, viszont egymás barátai),

– a „harmadik két” lovag $(A_3, F_3)$ a harmadik asztalhoz (hiszen mindkettőjüknek van ellensége az első két asztalnál, de egymásnak barátai) $\ldots$,

– a „tizedik két” lovag $(A_{10}, F_{10})$ a tizedik asztalhoz (mindkettőjüknek van ellensége az első kilenc asztal mindegyikénél, de egymásnak barátai),

– $A_{11}$ a tizenegyedik asztalhoz kerül (az első tíz asztal mindegyikénél van ellensége),

– míg $F_{11}$ a tizenkettedik asztalhoz kerül (minden asztalnál ül ellensége).

Vagyis a lovagok száma valóban lehet 22. 3 pont

Másodjára megmutatjuk, hogy a lovagok száma nem lehet 22-nél kevesebb. Legyen a tizenkettedik asztalhoz leülő egyik lovag (az általánosság megszorítása nélkül) $F$-beli. Mivel a tizenkettedik asztalhoz ült le, ezért az első 11 asztal közül valamennyinél ül $A$-beli lovag, vagyis $n \geqq 11$. Ekkor a tizenegyedik asztalnál is ül egy $A$-beli lovag. Emiatt az első tíz asztal közül valamennyinél kell, hogy üljön $F$-beli lovag. De akkor az első 10 asztalnál ülő (legalább 10 darab) $F$-beli, és a tizenkettedik asztalnál ülő $F$-beli együtt legalább 11 darab $F$-beli lovag. Vagyis $m \geqq 11$. Azaz a lovagok száma $m + n \geqq 22$.

*Vagyis legalább* 22 *lovag érkezett a vendégségbe.* 3 pont

Összesen: 7 pont