Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2013/2014-es tanév
2. forduló
haladók II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Legyen $f(x) = ax + b$ egy elsőfokú polinom. Bizonyítsuk be, hogy nem lehet az

$$\big|f(0) - 1\big|, \quad \big|f(1) - 3\big|, \quad \big|f(2) - 9\big|$$

számok mindegyike 1-nél kisebb.

Megoldás. Tegyük fel, hogy az állítás nem teljesül, azaz mégis létezik olyan polinom, hogy a három szám mindegyike kisebb 1-nél. 1 pont

Az elsőből $|b - 1| < 1$, azaz $0 < b < 2$,
a másodikból $|a + b - 3| < 1$, azaz $2 < a + b < 4$,
a harmadikból $|2a + b - 9| < 1$, azaz $8 < 2a + b < 10$ adódik. 3 pont

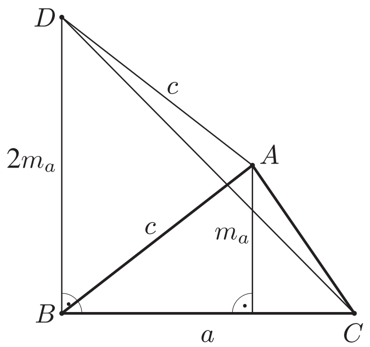
Az első és a harmadik összegét 2-vel osztva $4 < a + b < 6$ következik. 2 pont

Ezt összevetve a másodikkal, ellentmondásra jutunk, ezzel igazoltuk az állítást. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Mutassuk meg, hogy egy tetszőleges háromszögben $a^2 + 4m_a^2 \leqq (b + c)^2$, ahol a, b és c a háromszög oldalainak hosszát, m_a az a oldalhoz tartozó magasságot jelenti!

Megoldás.



Állítsunk a B csúcsban merőlegest a BC oldalra, és mérjük rá az A csúcsot is tartalmazó félsíkban a $2m_a$ távolságot. Így kapjuk a D pontot. 2 pont

A DBC derékszögű háromszögre felírva Pitagorasz tételét

$$DC^2 = BC^2 + BD^2,$$

azaz

$$DC^2 = a^2 + (2m_a)^2.$$ 1 pont

Viszont az ABD háromszög egyenlőszárú, $AD = AB = c$, 2 pont
ezért az ACD háromszög DC oldalára felírva a háromszög-egyenlőtlenséget

$$DC \leqq AC + AD, \quad \text{azaz} \quad DC \leqq b + c. \qquad \text{1 pont}$$

Ezt az (1) összefüggésbe helyettesítve a bizonyítandó állítást kapjuk. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. Oldjuk meg az egész számok halmazán a $2x^2y^2 + y^2 = 6x^2 + 12$ egyenletet!

Megoldás. Rendezzük át az egyenletet a következőképpen:

$$y^2 - 12 = 2x^2 \cdot \left(3 - y^2\right)$$

Mivel y egész szám, ezért $y^2 \neq 3$, vagyis az egyenlet az

$$x^2 = \frac{y^2 - 12}{2 \cdot \left(3 - y^2\right)} \qquad \text{1 pont}$$

alakba írható.

A egyenlet bal oldala nem vehet fel negatív értéket, ezért a jobb oldala sem, ahonnan a

$$0 \leqq \frac{y^2 - 12}{2 \cdot \left(3 - y^2\right)}$$

feltételt kapjuk. 1 pont

Ez akkor teljesül, ha azonos előjelű a számláló és a nevező, vagy a számláló értéke 0. 1 pont

A számláló $y^2 > 12$ esetben, míg a nevező $(0 \leqq)\ y^2 < 3$ esetben vesz fel pozitív értéket, innen nem kapunk megoldást.

A számláló $y^2 \leqq 12$ esetben negatív vagy 0, a nevező pedig $y^2 > 3$ esetben negatív, tehát a feltétel ekvivalens a $3 < y^2 \leqq 12$ egyenlőtlenséggel. 2 pont

Mivel y egész szám, ezért csak $y^2 = 4$ vagy $y^2 = 9$ lehet. Az $y^2 = 9$ esetben $x^2 = \frac{1}{4}$, tehát x nem egész, innen nem kapunk megoldást. 1 pont

Az $y^2 = 4$ esetben $x^2 = 4$, ebből négy $(x; y)$ számpár adódik: $(2; 2)$, $(2; -2)$, $(-2; 2)$ és $(-2; -2)$, melyek valóban megoldásai az egyenletnek. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. Legyen $H = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$.

H egy nemüres részhalmazát *átlagosnak* hívjuk, ha a benne szereplő számok átlaga megegyezik 5-tel (pl. az $L = \{3; 4; 8\}$ ilyen).

Hány átlagos részhalmaza van H-nak?

Megoldás. Áttérünk a K halmazra, ahol $K = \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$, és a 0 összegű részhalmazokat vizsgáljuk (ezekből triviálisan adódnak „visszatolással”, vagyis a jó K-beli részhalmaz elemeinek 5-tel való növelésével a jó H részhalmazok).

Egy K-beli „jó” összegben az 1; 2; 3; 4 számokból számolt összeg ugyanannyi, mint a -1; -2; -3; -4 számokból számolt összeg ellentettje.

A jó összegben szereplő pozitív számok összege szerint fogunk esetet bontani, azt pedig a végén nézzük meg, hogy hova tehető a nulla.

a) Ha az összegben szereplő pozitív számok összege: **0** (vagyis nem szerepel pozitív szám a jó összegben), akkor csak az lehet, hogy a K-beli jó részhalmazban csak a 0 szerepel. $\rightarrow$ A jó H-beli részhalmaz: $\{5\}$.

b) Ha az összegben szereplő pozitív számok összege: **1**. Egyféleképpen lehet a pozitív számok közül: csak az 1-et veszem bele a részhalmazba ($\rightarrow$ $\{-1; 1\}$ $\rightarrow$ $\{4; 6\}$). **1 eset**

c) Ha az összegben szereplő pozitív számok összege: **2**. Egyféleképpen lehet a pozitív számok közül: csak a 2-t veszem bele a részhalmazba ($\rightarrow$ $\{-2; 2\}$ $\rightarrow$ $\{3; 7\}$). **1 eset** 1 pont

d) Ha az összegben szereplő pozitív számok összege: **3**. Kétféleképpen lehet; $3/2+1$. (A negatív -3-as összegre is két eset $-3/-2+(-1)$). Itt a két „pozitív esetet”, és a két „negatív esetet” tetszőlegesen párosíthatjuk $\rightarrow$ 4 megoldás: ($\rightarrow$

$$\{-3; +3\}/\{-3; +1; +2\}/\{-2; -1; +1; +2\}/\{-2; -1; +3\}$$

a megfelelő K-beli jó halmazok). **4 eset**

(Ha ez a gondolat szerepel a dolgozatban, akkor jár az ezért a részért adható 2 pont!) 2 pont

e) Ha az összegben szereplő pozitív számok összege: **4**. Kétféleképpen lehet;
$4/3+1$ $\rightarrow$ **4 eset**

f) Ha az összegben szereplő pozitív számok összege: **5**. Kétféleképpen lehet;
$4+1/3+2$ $\rightarrow$ **4 eset** 1 pont

g) Ha az összegben szereplő pozitív számok összege: **6**. Ez éppen a „komplentere” annak, amikor az összeg 4 (e eset, $1+2+3+4=10$ miatt!). Vagyis minden olyan esetet, ahol az összeg 6, párosíthatunk egy olyan esettel, ahol az összeg 4, így a két alesetben szereplő átlagos halmazok száma azonos. $\rightarrow$ **4 eset**

$h-i-j-k$) ($7-8-9-10$-es összeg) a megfelelő d, c, b, a esetek komplementerei az iméntiek szerint. **Rendre 4/1/1/1 esettel.**

(Ha ez a gondolat szerepel a dolgozatban, akkor jár az ezért a részért adható 2 pont!) 2 pont

Amikor az összegben szereplő pozitív számok összege nem 0 ($b-k$-ig), akkor a 0-t belevehetjük a halmazunkba, és ki is hagyhatjuk (ezek az esetszámok duplázódnak), amikor a pozitív számok összege 0 (a eset), akkor a 0-t muszáj belevenni (1 eset).

Vagyis az esetek száma: $2 \cdot (1+1+4+4+4+4+4+1+1+1)+1 = 51$. 1 pont

Összesen: 7 pont