Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2015/2016-os tanév
2. (döntő) forduló
Haladók III. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Adott ABC háromszög esetén a QRS háromszöget nevezzük az ABC háromszög *kölyök-háromszögének,* ha az igaz, hogy

– QP_1 felezőpontja R,

– RP_2 felezőpontja S,

– SP_3 felezőpontja Q, ahol a P_1, P_2, P_3 pontok valamilyen sorrendben az A, B, C pontok.

Igazoljuk, hogy minden ABC háromszögnek két kölyök-háromszöge van, és a két kölyök-háromszög metszetének a területe az ABC háromszög területének az 1/10-e.

Megoldás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy a P_1 pont az A ponttal egyezik meg. Innen valóban két lehetőség van P_2, P_3 választására: vagy $P_3 = B$, $P_2 = C$, vagy fordítva: $P_3 = C$, $P_2 = B$.

(Természetesen ezzel még nem igazoltuk, hogy egyáltalán van-e ilyen kölyök-háromszög.) 1 pont

Most megmutatjuk, hogy a $P_1 = A$, $P_2 = B$, $P_3 = C$ esethez egyértelműen tartozik QRS kölyök-háromszög, és megadjuk QRS „helyzetét”.

Legyen az A, B, C csúcsokkal szemben az a, b, c oldal, az ezekhez tartozó magasságok pedig legyenek rendre: m_a, m_b, m_c!

Legyen a Q csúcs távolsága az a, b, c oldaltól x, y, z!

(*Megjegyzés:* Ezeket a távolságokat előjeles távolságnak fogjuk érteni, ami azt jelenti, hogy, pl. ha az a oldalegyenese által meghatározott közös félsíkban van Q, és A, akkor $x > 0$, ha ellentétes félsíkban, akkor $x < 0$, illetve, ha Q az a oldalegyenesen, akkor $x = 0$.)

Ekkor nyilván A, B, C csúcsok távolsága a rájuk illeszkedő oldalaktól 0, míg a szemben lévő oldalaktól rendre: m_a, m_b, m_c.

A felezőpont tulajdonságai miatt számolható Q, R, S távolsága az oldalaktól:

Mivel QA felezőpontja R, ezért R távolsága az a oldaltól: $\frac{x+m_a}{2}$,

távolsága a b oldaltól: $\frac{y}{2}$,

távolsága a c oldaltól: $\frac{z}{2}$,

Mivel RB felezőpontja S, ezért S távolsága az a oldaltól: $\frac{x+m_a}{4}$.

távolsága a b oldaltól: $\frac{\frac{y}{2}+m_b}{2} = \frac{y+2m_b}{4}$,

távolsága a c oldaltól: $\frac{z}{4}$,

Mivel SC felezőpontja Q, ezért Q távolsága az a oldaltól: $\frac{x+m_a}{8}$,

távolsága a b oldaltól: $\frac{y+2m_b}{8}$,

távolsága a c oldaltól: $\frac{\frac{z}{4}+m_c}{2} = \frac{z+4m_c}{8}$.

Másfelől az utóbbi távolságok éppen megegyeznek x, y, z-vel, vagyis

$$\frac{x+m_a}{8} = x \longrightarrow \frac{m_a}{7} = x,$$
$$\frac{y+2m_b}{8} = y \longrightarrow \frac{2m_b}{7} = y,$$
$$\frac{z+4m_c}{8} = z \longrightarrow \frac{4m_c}{7} = z.$$

Vagyis Q távolsága az oldalaktól: $\left(\frac{m_a}{7}; \frac{2m_b}{7}; \frac{4m_c}{7}\right)$.

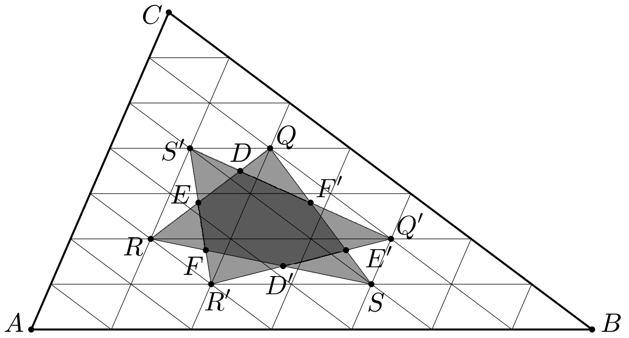
Hasonlóan R távolsága az oldalaktól: $\left(\frac{4m_a}{7}; \frac{m_b}{7}; \frac{2m_c}{7}\right)$, és

S távolsága az oldalaktól: $\left(\frac{2m_a}{7}; \frac{4m_b}{7}; \frac{m_c}{7}\right)$.

Vagyis ebben az esetben a QRS kölyök-háromszög valóban egyértelműen létezik, illetve a távolságok pozitív volta pedig egyúttal azt is jelenti, hogy a QRS háromszög teljes egészében az ABC belsejében van.

(*Megjegyzés:* Vektorokkal egyszerűbben kijönnek ugyanezek az eredmények.) 2 pont

Az eddigi eredményeink alapján használjuk a következő ábrát, és a jelöléseit!

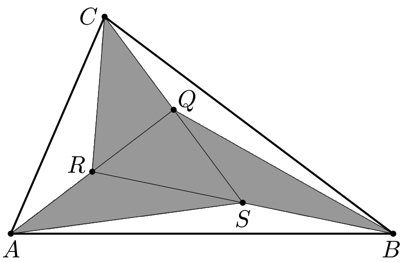


Az ábra elkészítésénél minden oldal összes hetedelőpontját vettük, és azokon keresztül párhuzamosokat húzva a megfelelő oldallal 49 egybevágó (*a továbbiakban egységnyi területűnek tekintett $\rightarrow$ így ABC területét 49-nek tekintjük*), az ABC-hez hasonló kisebb háromszögre bontottuk az ABC háromszöget.

QRS, és $Q'R'S'$ a két kölyök-háromszög, míg nekünk a $DEFD'E'F'$ hatszög területét kell meghatároznunk.

(*Megjegyzés:* Mivel Q, R, S, Q', R', S' az ábrán rácspontok, a rácsbeli koordinátáik miatt D, E, F, D', E', F' pontok léteznek, és az ábrán „felrajzolt módon, sorrendben” léteznek, hiszen mindegyikük egy megfelelő rácstrapéz átlós pontja.) 1 pont

Először megmutatjuk, hogy bármely kölyök-háromszög területe az ABC területének éppen 1/7-e (vagyis, ha ABC területe 49, akkor pontosan 7).



Ugyanis $T_{QRS} = T_{RAS} = T_{SBQ} = T_{QCR}$ hiszen (Q, R, S felezőpont volta miatt) azonos oldalú, és magasságú háromszögek mind a QRS-sel.

Másfelől $T_{RAS} = T_{SAB}$, $T_{SBQ} = T_{QBC}$, és $T_{QCR} = = T_{RCA}$ hiszen itt is rendre azonos oldalú, és magasságú háromszögekről van szó.

Innen adódik, hogy $T_{QRS} = \dfrac{T_{ABC}}{7}$. 1 pont

Innen a $DEFD'E'F'$ hatszög területe számolható például a következőképpen:

$$T_{DEFD'E'F'} = T_{DRD'Q'} + T_{ER'E'Q} + T_{FSF'S'} - T_{QRS} - T_{Q'S'R'},$$

hiszen a jobboldali összeg mind az öt tagjában a $DEFD'E'F'$ hatszög területét egyszer-egyszer vettük (háromszor pozitív, kétszer negatív előjellel), míg az ERF, $FR'D'$, …, $DS'E$ háromszögek területét egyszer negatív, egyszer pozitív előjellel vettük. Innen

$$T_{DRD'Q'} = T_{DRQ'} + T_{D'Q'R} = 3 \cdot \left(\frac{3}{4} \cdot 2\right) + 3 \cdot \left(\frac{3}{5} \cdot 1\right) = \frac{9}{2} + \frac{9}{5} = \frac{63}{10},$$

ahol a $T_{DRQ'} = 3 \cdot \left(\dfrac{3}{4} \cdot 2\right)$ képletben a 3 az RQ' távolságot jelenti (*ez 3-szor annyi, mint valamely egységnyi területűnek tekintett rácsháromszög vízszintes oldala*), míg a $\left(\dfrac{3}{4} \cdot 2\right)$

az RQ' oldalhoz tatozó magasságot (*ez éppen* $3/2$*-szer annyi, mint az egységnyi területű-nek tekintett rácsháromszög vízszintes oldalához tartozó magasság*), ez utóbbi az $RQ'D$, illetve a $QS'D$ háromszögek hasonlóságából jön ki, illetve abból, hogy a hasonlóság aránya: $\lambda = \dfrac{RQ'}{QS'} = 3$.

$T_{D'Q'R} = 3 \cdot \left(\dfrac{3}{5} \cdot 1\right)$ pont ugyanígy számolható.

$T_{ER'E'Q}$, és $T_{FSF'S'}$ pontosan ugyanúgy számolható, mint $T_{DRD'Q'}$, és mindre:

$$T_{DRD'Q'} = T_{ER'E'Q} = T_{FSF'S'} = \frac{63}{10}$$

adódik.

Emiatt

$$T_{DEFD'E'F'} = 3 \cdot \frac{63}{10} - 2 \cdot 7 = \frac{189 - 140}{10} = \frac{49}{10}.$$

Mivel $T_{ABC} = 49$, emiatt a két kölyök-háromszög metszetének területe valóban pontosan 1/10-e az ABC háromszög területének. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Az $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nem konstans függvényről azt tudjuk, hogy minden valós x esetén

$$f(1-x) + (1-x)f(x) = c,$$

ahol c rögzített egész konstans.

Igazoljuk, hogy ha $f(x)$-nek van egész fixpontja, akkor van két olyan fixpontja is, amely nem egész.

(z fixpontja $f(x)$-nek, ha $f(z) = z$.)

Megoldás. Először határozzuk meg $f(x)$ értékét $x = 0$ esetén! Helyettesítsünk be x helyére 1-et! Ekkor

$$f(1-1) + (1-1)f(1) = f(0) = c.$$

Ha $x \neq 0$, akkor szorozhatjuk az egyenletünket x-szel:

$$xf(1-x) + x(1-x)f(x) = cx. \tag{1}$$

Valamint az $f(1-x) + (1-x)f(x) = c$ képletbe x helyére $1-x$ helyettesítésével:

$$f(x) + xf(1-x) = c. \tag{2}$$ 1 pont

$(1)-(2) \longrightarrow (-x^2+x-1)f(x) = c(x-1)$. Mivel $-x^2+x-1 < 0$ minden x-re, ezért oszthatunk vele: $f(x) = \dfrac{c(x-1)}{-x^2+x-1}$. Ezzel megkaptuk az $f(x)$ hozzárendelési szabályát (ha $x \neq 0$).

Mivel ez a képlet $x = 0$ esetén: $f(0) = \dfrac{c(0-1)}{-0^2+0-1} = c$, ezért minden x-re megadja $f(x)$-et. 2 pont

Legyen most már z fixpontja $f(x)$-nek!

Ha $z = 0 \longrightarrow f(0) = 0 = c \longrightarrow f(x) = 0$ konstans, ami nem megfelelő.

Ha $z = 1 \longrightarrow f(1) = \dfrac{c(1-1)}{-1^2+1-1} = 0$, vagyis ez sem lehet fixpont.

Vagyis $z = 0; 1$ nem fixpont. 1 pont

Legyen most már $z \neq 0; 1$ tetszőleges egész fixpont, vagyis

$$z = f(z) = \frac{c(z-1)}{-z^2+z-1}.$$

Az egyenletet rendezve:

$$c(z-1) = -z^3+z^2-z \longrightarrow c = \frac{-z^3+z^2-z}{z-1} = -z^2-1-\frac{1}{z-1}$$

adódik. Mivel c, z egészek, innen $(z-1) \mid 1 \longrightarrow z_1 = 0$; $z_2 = 2$ adódik.

A $z = 0$-t elintéztük már, az nem lehet fixpont, marad, hogy $z = 2$ a fixpont. 1 pont

Innen adódik, hogy $c = \dfrac{-2^3+2^2-2}{2-1} = -6$.

Vagyis a függvényem: $f(x) = \dfrac{-6(x-1)}{-x^2+x-1}$.

Lássuk, ennek vannak-e egyéb fixpontjai! Ehhez az kell, hogy $x = \dfrac{-6(x-1)}{-x^2+x-1}$ legyen, innen: $-6(x-1) = -x^3+x^2-x$, majd $0 = x^3-x^2-5x+6$ adódik. Mivel tudjuk, hogy ennek az egyenletnek 2 a gyöke, több módon szorzattá alakíthatjuk, végül:

$$0 = x^3-x^2-5x+6 = (x-2)(x^2+x-3)$$

adódik.

Az $x^2+x-3 = 0$ két valós, de irracionális megoldása adja az $f(x)$ két egyéb fixpontját: $z_{2,3} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$ a két nemegész fixpont (a $z = 2$ mellett). 2 pont

Összesen: 7 pont

3. Egy kör alakú asztal körül 20 diák ül. Minden diák előtt van néhány cukorka, kezdetben 2, 4, 6, 8, …, 38, 40, valamilyen tetszőleges sorrendben. A diákok – tanáruk vezetésével – a következőt teszik. Egy lépésben minden diák odaadja a tőle jobbra ülő diáknak cukorkái felét, majd ha így páratlan sok cukorkája maradna, akkor a tanártól kap még egyet. Ezt a lépést ismételgetik újra és újra. Bizonyítsuk be, hogy egy idő után minden diáknak ugyanannyi cukorkája lesz.

1. megoldás. Általánosabban azt bizonyítjuk, hogy ha az $n \geqq 3$ diák előtt kezdetben $a_1, a_2, \ldots, a_n$ cukor van (a_i páros minden i-re), akkor a folyamat véges lépésben elér abba az állapotba, ahol minden diák előtt azonos számú cukorka van.

Néhány kis n-re végzett kísérlet után megfogalmazható az alábbi két sejtés:

1. Ha egy lépés előtt $\max\{a_i\} = M$, akkor a lépés után is legfeljebb M a maximum.

2. Ha egy lépés előtt $\min\{a_i\} = m$, akkor a lépés után is legalább m a minimum. 2 pont

Az első sejtést bizonyítjuk, a második ugyanúgy megy. Legyen három szomszédos diák előtt rendre a, b és c cukor egy lépés előtt. Tudjuk, hogy $a, b, c \leqq M$. A lépés után $\frac{b}{2} + \frac{c}{2}$ vagy $\frac{b}{2} + \frac{c}{2} + 1$ cukor lesz a középső diák előtt. (A b cukor felét továbbadja, a c cukor felét megkapja, és esetleg eggyel ki kell egészíteni párosra.) Az első esetben $\frac{b+c}{2} \leqq \frac{M}{2} + \frac{M}{2} = M$. A második eset csak úgy állhat elő, ha $\frac{b+c}{2} < M$, hiszen M páros. Tehát ekkor is $\frac{b}{2} + \frac{c}{2} + 1 \leqq M$ cukor lesz a középső diák előtt. Az érvelés bármelyik diákkal – mint középsővel – elmondható, ezért a lépés után nem növekedhetett a maximális cukorszám. 1 pont

A másik lényeges észrevétel a következő. Ha $\min\{a_i\} = m$ és egy pillanatban $k > 0$ diáknak van pontosan m cukorkája (és még van legalább két különböző cukorszám), akkor a lépés után az m cukorkával rendelkező diákok száma k-nál kevesebb. 1 pont

Ugyanis ha egy minimális számú (m) cukorkával bíró diák egy a cukorkával bíró diáktól kap cukorkákat, akkor $\frac{m+a}{2}$ vagy $\frac{m+a}{2} + 1$ cukorkája lesz a lépés után. $a \geqq m$ miatt csak akkor nem növekedett cukorkái száma, ha $a = m$. Tehát csak azok a minimális darabszámok maradnak meg, amelyektől balra is minimális a cukorkák száma. Ez pedig legalább az egyik minimumra nem teljesül, ha nem minden cukorkaszám egyenlő. Az is világos, hogy ha valakinél kezdetben a m-nél több cukor volt, annál egy lépés után is m-nél több cukorka lesz. 1 pont

Az eddigi észrevételekből már egyszerűen következik a feladat állítása. Legyen $\max\{a_i\} = M$ és $\min\{a_i\} = m$. Ha $M = m$, akkor vége a folyamatnak. Ha $m < M$, akkor minden lépésben csökken az m cukorkával rendelkező diákok száma, ezért véges sok lépés után $m' > m$ lesz a cukorkaszám minimuma. Mivel a darabszámok pozitív egészek, így véges sok lépésben eljutunk oda, hogy a minimum és a maximum megegyezik, vagyis minden diáknak ugyanannyi cukorkája van. 2 pont

---

Összesen: 7 pont

2. megoldás vázlata: Az előző megoldásban már láttuk, hogy a maximális cukorkaszám nem nőhet az eredeti érték felé. Emiatt csak véges sok különböző cukorka-eloszlás fordulhat elő, vagyis csak akkor tarthatna a végtelenségig a folyamat, ha egy idő után „ciklizál”. Továbbá a ciklusban már nem fordulhat elő, hogy a tanár új cukrot „tesz a rendszerbe”, hiszen a periódus végén ugyanannyi cukor van, mint a kezdetekor.

Indirekt tegyük tehát fel, hogy ki tud alakulni egy ilyen ciklus! Ennek kezdetekor a cukorkaszám legyen $a_0, a_1, \ldots, a_{19}$, és az átadás iránya legyen $a_{i+1} \to a_i$. Mivel a ciklusban már nem kerül új cukor a rendszerbe, ezért egy lépésben mindig a következő módon változik a cukorkaszám:

$$a_i \leftarrow \frac{a_i + a_{i+1}}{2},$$

ahol az indexelés (mod 20) értendő.

Vizsgáljuk most meg, hogy egy kiszemelt diáknak hogyan változik a cukorkaszáma 19 lépés során. $\mathcal{A}_i$ jelölje a kiszemelt diák cukorkaszámát a ciklus i. lépése után.

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_0 &= a_0, \\
\mathcal{A}_1 &= \frac{a_0 + a_1}{2}, \\
\mathcal{A}_2 &= \frac{a_0 + 2a_1 + a_2}{4}, \\
\mathcal{A}_3 &= \frac{a_0 + 3a_1 + 3a_2 + a_3}{8}, \\
&\vdots \\
\mathcal{A}_{19} &= \frac{\binom{19}{0}a_0 + \binom{19}{1}a_1 + \binom{19}{2}a_2 + \ldots + \binom{19}{19}a_{19}}{2^{19}}.
\end{aligned}$$

Ha a ciklus elején a maximális cukorkaszám M volt, és nem mindegyik diák előtt volt M cukor, akkor

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{19} &= \frac{\binom{19}{0}a_0 + \binom{19}{1}a_1 + \binom{19}{2}a_2 + \ldots + \binom{19}{19}a_{19}}{2^{19}} \\
&< \frac{\binom{19}{0}M + \binom{19}{1}M + \binom{19}{2}M + \ldots + \binom{19}{19}M}{2^{19}} \\
&= M \cdot \frac{\binom{19}{0} + \binom{19}{1} + \binom{19}{2} + \ldots + \binom{19}{19}}{2^{19}} = M \cdot 1
\end{aligned}$$

Ez viszont azt jelentené, hogy 19 lépés után csökkent a maximális cukorkaszám, ami ellentmond a periodicitás feltevésének, hiszen a maximum nem tud növekedni, ezért nem tudnánk a kiinduló állapotba visszatérni.