Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2015/2016-os tanév
I. forduló
Kezdők I–II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Tekintsük az első 30 pozitív egész szám összegét, majd tetszőleges számú tag előjelét változtassuk meg. Megtehetjük-e ezt úgy, hogy a kapott összeg 300 legyen?

Megoldás.

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 30 = \frac{30(30+1)}{2} = 465.$$ 2 pont

Ha valamely szám előjele megváltozik, akkor az összeg a szám kétszeresével, 2 pont
azaz páros számmal csökken, így páratlan marad. 1 pont

Ezért soha nem kaphatunk eredményül 300-at. 1 pont

2. Mi a $2015^{2015} + 2015^{2016}$ összeg utolsó 6 számjegye?

Megoldás. Emeljünk ki 2015^{2015}-t!

$$2015^{2015} \cdot (1 + 2015) = 2015^{2015} \cdot 2016.$$ 1 pont

2015 osztható 5-tel. 1 pont

2016 osztható 2^5-nel. 1 pont

$$2015 = 5 \cdot 403; \qquad 2016 = 2^5 \cdot 63;$$
$$2015^{2015} \cdot 2016 = 5^{2015} \cdot 403^{2015} \cdot 2^5 \cdot 63.$$

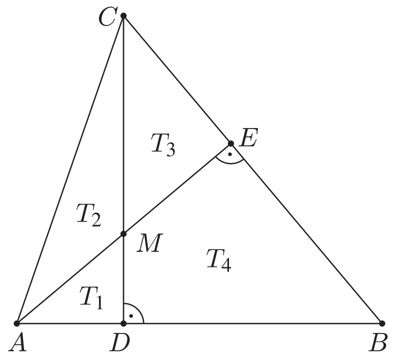
A szorzat tehát osztható 5^5-nel és 2^5-nel, ezért osztható 10^5-nel is, vagyis az utolsó 5 számjegye 00000. 2 pont

Ha a számot leosztanánk 10^5-nel, akkor egy 5-tel osztható páratlan számot kapnánk, ami ezért 5-re végződik. Tehát az eredeti szám utolsó 6 számjegye: 500 000 1 pont

Megjegyzés: Más megoldásmenet esetén minden megtalált (és megindokolt) számjegyért 1 pont jár.

3. Egy hegyesszögű háromszöget 2 magasságvonala 4 részre bontja. Tudjuk, hogy ebből a 4 részből 2-2-nek egyenlő a területe. Mekkorák a háromszög szögei?

Megoldás.



Jelöljük az *ábra* szerint a kialakult 4 területet! 3 lehetőség van arra, hogy melyik 2 rész területe egyenlő:

$a)$ $T_1 = T_2$ és $T_3 = T_4$;
$b)$ $T_1 = T_4$ és $T_2 = T_3$;
$c)$ $T_1 = T_3$ és $T_2 = T_4$. 1 pont

Az $a)$ eset nem lehetséges, mert $T_1 = T_2$-ből az következik, hogy M felezi CD-t, mivel a két háromszög A-ból induló magassága megegyezik. Viszont ekkor T_4 biztosan nagyobb, mint T_3, mert ha M felezi CD-t, akkor $T_3 = T_{MED} < T_4$. Hasonlóan nem lehetséges a $b)$ eset sem. 2 pont

A $c)$ esetből $T_1 + T_2 = T_3 + T_4$, illetve $T_1 + T_4 = T_2 + T_3$ következik, vagyis a két magasságvonal egyben súlyvonal is. 1 pont

Ha egy háromszögben egybeesik egy magasságvonal a súlyvonallal, akkor a háromszög egyenlőszárú, mert a magasságvonal ekkor 2 egybevágó háromszögre bontja az eredeti háromszöget. 1 pont

Mivel most két magasságvonal is egybeesik egy-egy súlyvonallal, ezért a háromszög szabályos. A szögei tehát 60 fokosak. 1 pont

4. Egy 4×4-es táblázat mindegyik mezőjébe beírjuk az 1, 2, 3 számok valamelyikét.

$a)$ Elérhető-e így, hogy minden sorban és minden oszlopban különbözzön a számok összege?

$b)$ Elérhető-e így, hogy minden sorban, minden oszlopban és mindkét átlóban különbözzön a számok összege?

Megoldás. $a)$ Igen, elérhető. Egy lehetséges elrendezés (a sorok mellett, illetve az oszlopok alatt az összegeket tüntettük fel):

1	1	1	1	4
1	1	2	3	7
1	1	3	3	8
2	3	3	3	11
5	6	9	10	

2 pont

$b)$ Nem érhető el:

Egy sorban, oszlopban vagy átlóban az összeg legalább $4 \cdot 1 = 4$, és legfeljebb $4 \cdot 3 = 12$ lehet, azaz az összegzéskor legfeljebb 9-féle számot kaphatunk eredményül. 1 pont

A táblázatban 4 sor, 4 oszlop és 2 átló szerepel, ami összesen 10-féle összeget jelent. 1 pont

Mivel az összegek száma nagyobb, mint a lehetséges eredmények száma, a skatulyaelv értelmében kell lennie olyan eredménynek, ami legalább kétszer szerepel. 2 pont

Megjegyzés: Ha a versenyző *indoklás nélkül* csak azt állapítja meg, hogy $a)$ esetében lehetséges, a $b)$ esetében pedig nem lehetséges a kitöltés, akkor összesen 1 pontot kaphat erre a feladatra.