Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2017/2018-as tanév
2. forduló
Haladók II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy tanár kijavította egy 12 fős csoport dolgozatait. A kijavított dolgozatok egymás felett helyezkednek el. A tanár készül felírni a jegyeket egy papírlapra, amelyen a tanulócsoport tagjainak neve van ábécé rendben felsorolva. A lap egyik oldalán tíz név szerepel, a másik oldalon pedig kettő. A lapnak kezdetben az az oldala van felül, amelyiken tíz név szerepel. A tanár először a legfelül lévő dolgozat jegyét írja a megfelelő diák neve mellé, majd az alatta levőét és így tovább. (Természetesen az utolsó jegy beírása után már nem fordítja meg a lapot.)

Döntsük el, hogy minek nagyobb az esélye: annak, hogy a tanár a lapot legalább négyszer megfordítja a jegyek beírása során, vagy annak, hogy legfeljebb háromszor? **7 pont**

Megoldás: Nevezzük a lap hátoldalának azt az oldalát, amelyen két név szerepel. A lapot legfeljebb négyszer kell a tanárnak megfordítania, és pontosan akkor fogja négyszer megfordítani, ha a hátoldalon szereplő két diák neve nincs közvetlenül egymás alatt a névsorban, továbbá az egyik ilyen név nem legalul szerepel. 2 pont

A 12 diák dolgozata 12!-féle sorrendben jöhet egymás után. 1 pont

Most számoljuk meg azokat az eseteket, ahol a hátoldalon lévő két diák neve közvetlenül egymás alatt van, vagy a két név közül az egyik legalul van. Ha az egyik név alul van, az $2 \cdot 11!$ darab eset, mert 2-féle módon választhatjuk ki az alul lévő nevet, és a maradék 11 nevet 11!-féle módon rakhatjuk sorba. 1 pont

Azokat az eseteket kell még megszámolni, amikor a két név egyike sincs legalul, de közvetlenül egymás alatt vannak. A lejjebb lévő név lehet a 2., 3., …, 11. helyen: ez 10 lehetőség. Ez így tehát összesen $10 \cdot 2 \cdot 10! = 20 \cdot 10!$ lehetőség. 1 pont

Az olyan esetek száma tehát, ahol legfeljebb háromszor kell megfordítania a tanárnak a lapot, $2 \cdot 11 \cdot 10! + 2 \cdot 10 \cdot 10! = 42 \cdot 10!$. Mivel az összes eset száma $12! = 132 \cdot 10!$, így annak nagyobb az esélye, hogy a tanárnak meg kell négyszer fordítani a lapot (hiszen ez $90 \cdot 10!$ darab eset). 2 pont

Összesen: **7 pont**

Másik megoldás: Gondolatban írjuk fel sorban a tanulók nevét abban a sorrendben, amelyben a dolgozataik szerepelnek, majd írjunk egy 1-est a tanuló neve helyére, ha a névsort tartalmazó lapon az elöl lévő oldalon, illetve egy 2-est, ha a hátul lévő oldalon szerepel. 1 pont

Vizsgáljuk a nevek helyére írt, tíz darab 1-es és két darab 2-es számból álló sorozatot.

Legfeljebb négyszer kell megfordítani a lapot: a két 2-es előtt és után.

Pontosan négyszer pedig akkor kell megfordítani a lapot, ha mindkét 2-es után 1-es jön (ekkor ugyanis mindkét 2-es előtt is és után is fordítunk). 1 pont

Vonjuk össze a 2-eseket az utánuk következő 1-essel, és tekintsük 21-esnek. Eszerint négy fordítás abból a sorrendből alakulhat ki, amikor nyolc darab 1-es és két darab 21-es szerepel a sorban, vagyis tíz pozíción szerepel nyolc 1-es és két 21-es. 1 pont

Ez $\binom{10}{2} = 45$-féleképpen fordulhat elő. 1 pont

Az összes lehetséges számsorozat esetében 12 helyen szerepel tíz 1-es és két 2-es, ami $\binom{12}{2} = 66$ lehetőséget jelent. 1 pont

A megmaradó $66 - 45 = 21$ esetben elég legfeljebb háromszor fordítani. 1 pont

Ezért annak nagyobb az esélye, hogy négyszer kell megfordítani a lapot. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés: Többféle jó számolás elképzelhető, ahol más és más az összes eset száma. Ezekért természetesen jár a teljes pontszám, ha kihozza a két eset számainak helyes arányát (7 : 15).

2. Egy osztály túrázás közben azt játszotta, hogy egyikük összeadta a természetes számokat egy általa kiválasztott n természetes számig, és megmondta az eredményt a többieknek. Az mondhatta a következő összeget, aki először eltalálta n értékét.

Levente a 2273-at adta fel.

Péter közbeszólt: ,,Biztosan hibáztál összeadás közben, mert a természetes számok összege sohasem végződhet 73-ra!”

Bizonyítsuk be Péter állítását, azaz: Az első n természetes szám összege nem végződhet 73-ra! **7 pont**

1. megoldás: Használjuk fel, hogy a természetes számok összege: $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. 1 pont

Ezt átalakítva:

$$\begin{aligned} 2S_n &= n^2 + n \\ 8S_n &= 4n^2 + 4n \\ 8S_n + 1 &= (2n+1)^2 \end{aligned}$$

2 pont

Indirekt tegyük fel, hogy $S_n = 100k + 73$, ahol k természetes szám.

Ekkor $8S_n + 1 = 800k + 584 + 1 = 100(8k+5) + 85$ alakú, tehát 85-re végződik. 1 pont

Az 5-re végződő négyzetszámok $(10l+5)^2$ alakban írhatók fel, ahol l természetes szám. 1 pont

De $(10l+5)^2 = 100l^2 + 100l + 25 = 100(l^2 + l) + 25$, tehát egy 5-re végződő négyzetszám csak 25-re végződhet. 1 pont

Ellentmondásra jutottunk, tehát hamis volt a felvetésünk, azaz S_n nem végződhet 73-ra. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás: Írjuk fel az első tíz végződést!

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
S_n	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55

1 pont

Képezzük az S_n-ből az S_{n+10}-et! Mivel a hozzáadott tíz tag végén minden számjegy pontosan egyszer fordul elő és ezek összege 45, ezért S_{n+10} utolsó számjegye 5-tel nagyobb vagy 5-tel kisebb S_n utolsó számjegyénél. 1 pont

Ezek alapján S_{20}-ig S_2 és az előbbiek alapján $S_{17} = 153$ végződik háromra, de egyik sem végződik 73-ra. 1 pont

Az előbbiekből következik, hogy S_{n+20} utolsó számjegye megegyezik S_n utolsó számjegyével, tehát csak S_{20k+2} és S_{20k+17} végződhet háromra. 1 pont

Az S_n-hez adott 20 szám összege: $(n+1) + (n+2) + \ldots + (n+20) = 20n + 210$. 1 pont

Ez $n = 20k + 2$ esetén $400k + 250$, $n = 20k + 17$ esetén $400k + 550$ alakú. 1 pont

Viszont így a 03 és 53 végződések váltogatják egymást, tehát nem lehet a végződés 73. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Egy kör metszi egy adott O csúcsú ($\alpha < 180°$) szög szárait, egyiket az A és B, másikat a C és D pontban. (Az A pont O és B között, a C pont O és D között van.) Az adott szög felezője a kört az M és az N pontban metszi. (O-hoz az M van közelebb.)

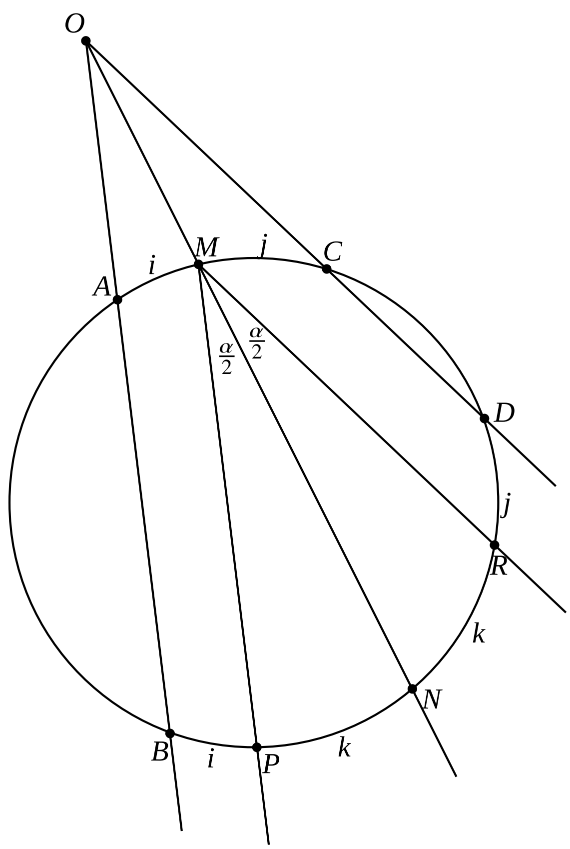
Bizonyítsuk be, hogy az $\widehat{AM}$ ív és az $\widehat{ND}$ ív összege egyenlő az $\widehat{MC}$ ív és a $\widehat{BN}$ ív összegével (a szóbanforgó négy ív az α szárai között van)! **7 pont**

Megoldás:

Az M ponton át húzzunk párhuzamos félegyeneseket az adott O csúcsú α szög száraival, az így kapott szög szárai a kör $\widehat{BN}$ ívét a P, $\widehat{ND}$ ívét az R pontban metszik. 2 pont

Az $\widehat{AM}$ ív és a $\widehat{BP}$ ív a körnek két párhuzamos egyenes közé eső ívei, ezért egyenlők, e két ív hossza legyen i. Hasonlóan az $\widehat{MC}$ ív és az $\widehat{RD}$ ív is egyenlők, ezek hossza legyen j. 2 pont

A $\widehat{PN}$ és az $\widehat{RN}$ ívek pedig a körnek ugyanakkora kerületi szögekhez tartozó ívei, ezért egyenlők, ezek hossza legyen k. 2 pont



$\widehat{AM} + \widehat{ND} = i + k + j = \widehat{MC} + \widehat{BN}$ 1 pont

Összesen: **7 pont**

4. Adottak az alábbi egyenletek:

$$x^2 + px + q = 0 \tag{1}$$

$$\frac{1}{x+2} + \frac{p}{x+1} + \frac{q}{x} = 0 \tag{2}$$

Bizonyítsuk be, hogy ha mindkét egyenletnek két valós gyöke van és az (1) egyenletnek pontosan egy gyöke van a $]0;1[$ intervallumban, akkor a (2) egyenletnek pontosan egy gyöke pozitív. **7 pont**

Megoldás: Mivel az (1) egyenletnek pontosan egy gyöke van a $]0;1[$ intervallumban, ezért az $f(x) = x^2 + px + q = 0$ másodfokú függvény helyettesítési értékei a 0 és az 1 helyen különböző előjelűek. 1 pont

$f(0) = q$ és $f(1) = 1 + p + q$. 1 pont

A (2) egyenletet átalakítva az $(1 + p + q)x^2 + (1 + 2p + 3q)x + 2q = 0$ másodfokú egyenlethez jutunk. 2 pont

Ennek gyökei pontosan akkor különböző előjelűek, ha $x_1 \cdot x_2 < 0$. 1 pont

A gyökök és együtthatók összefüggései alapján: $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{2q}{1+p+q} < 0$. 1 pont

Mivel q és $1 + p + q$ különböző előjelűek, ezért $\dfrac{2q}{1+p+q} < 0$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés: Az első egyenletből kapott $q(1 + p + q) < 0$ összefüggés az alábbi módon is megkapható:

A gyökök elhelyezkedésére két lehetőség van.

1. $0 < \dfrac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2}$ és $\dfrac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2} < 1$ és $1 \leq \dfrac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$

Mivel két valós gyök van, ezért $p^2 - 4q > 0$. Az első egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $p < 0$ és $q > 0$.

A második egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $-2 < p$, vagy ha ($p \leq -2$ és $p+q+1 < 0$).

A harmadik egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $p \leq -2$, vagy ha ($p > -2$ és $p+q+1 \leq 0$). 1 pont

2. $\dfrac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2} \leq 0$ és $0 < \dfrac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2}$ és $\dfrac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2} < 1$

Az első egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $p > 0$, vagy ha ($p \leq 0$ és $q < 0$).

A második egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $p < 0$, vagy ha ($p \geq 0$ és $q < 0$)

A harmadik egyenlőtlenség pontosan akkor teljesül, ha $p \geq -2$ és $0 < p + q + 1$. 1 pont

Az első egyenlőtlenség-rendszer tehát pontosan akkor teljesül, ha $q > 0$, és $p \leq -2$ esetén $p + q + 1 < 0$; valamint $-2 < p < 0$ esetén $p + q + 1 < 0$. Összefoglalva: $q(1 + p + q) < 0$.

A második egyenlőtlenség-rendszer pontosan akkor teljesül, ha $p \geq -2$ és $0 < p+q+1$, valamint $p > 0$ esetén $q < 0$ vagy $p \leq 0$ esetén $q < 0$. Összefoglalva: $q(1 + p + q) < 0$. 1 pont