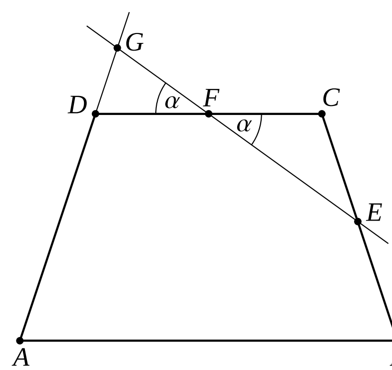
Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2017/2018-as tanév
Kezdők I–II. kategória 2. forduló
Kezdők III. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Az $ABCD$ szimmetrikus trapézban $AB \parallel CD$ és $AB \geq CD$. E és F a BC, illetve CD oldalak egy-egy belső pontja. Tudjuk, hogy $CE = CF$. Az EF egyenes az AD egyenest a G pontban metszi. Mekkorák a trapéz szögei, ha a DFG háromszög egyenlő szárú? **6 pont**

1. megoldás:



1 pont

$AB \parallel CD$ miatt az AB és CD oldalak közös felezőmerőlegese szimmetriatengelye az $ABCD$ trapéznak.

Használjuk fel, hogy a háromszög belső szögeinek összege 180°, az egyenlő szárú háromszög alapon fekvő szögei egyenlők, továbbá azt, hogy az egyállású szögek azonos nagyságúak!

Legyen $DFG = \alpha$. Ekkor $CFE = DFG = \alpha$, mivel csúcsszögek. Három esetet vizsgálhatunk aszerint, hogy a DFG egyenlő szárú háromszögnek melyik oldal az alapja.

1. eset: Ha GD a háromszög alapja:

Ekkor a DFG egyenlő szárú háromszögben $FGD = FDG = 90° - \dfrac{\alpha}{2}$. Tehát a trapézban $CDA = 90° + \dfrac{\alpha}{2}$.

Az FEC egyenlő szárú háromszögben $ECF = 180° - 2\alpha$.

A szimmetria miatt a trapéz D, illetve C csúcsainál lévő belső szögek egyenlők tehát:

$$90° + \frac{\alpha}{2} = 180° - 2\alpha,$$

amiből $\alpha = 36°$.

Tehát a trapéz A, B, C, D csúcsainál lévő szögei 72°, 72°, 108°, 108°-osak. 2 pont

2. eset: Ha FG a háromszög alapja:

Ekkor a DFG egyenlő szárú háromszögben $GDF = 180^\circ - 2\alpha$, így a trapézban $CDA = 2\alpha$.

Az FEC egyenlő szárú háromszögben a C csúcsnál $180^\circ - 2\alpha$ nagyságú szög van.

A szimmetria miatt a trapéz D, illetve C csúcsainál lévő belső szögek egyenlők tehát:

$$2\alpha = 180^\circ - 2\alpha,$$

amiből $\alpha = 45^\circ$.

Tehát a trapéz szögei 90°-osak, vagyis a négyszög téglalap. 2 pont

3. eset: Ha DF a háromszög alapja:

Ekkor a DFG egyenlő szárú háromszögben $GDF = \alpha$, így a trapézban $CDA = 180^\circ - \alpha$.

A CFE egyenlő szárú háromszögben $ECF = 180^\circ - 2\alpha$.

A szimmetria miatt a trapéz D, illetve C csúcsainál lévő belső szögek egyenlők tehát:

$$180^\circ - \alpha = 180^\circ - 2\alpha.$$

Ebből $\alpha = 0^\circ$ adódik.

Tehát ez az eset nem lehetséges, vagyis nem létezik a feltételeknek megfelelő trapéz. 1 pont

Összesen: **6 pont**

2. megoldás: Jelölje α az EFC szöget (ábra)! $CF = CE$ miatt $EFC\sphericalangle = FEC\sphericalangle$, így az EFC háromszögben $FCE\sphericalangle = 180^\circ - 2\alpha$. 1 pont

Ebből – tekintetbe véve a szimmetrikus trapéz szögeire fennálló összefüggéseket – a trapéz minden szöge meghatározható α segítségével: $ADC\sphericalangle = DCB\sphericalangle = 180^\circ - 2\alpha$, $ABC\sphericalangle = DAB\sphericalangle = 2\alpha$. 1 pont

Mivel $ADC\sphericalangle = 180^\circ - 2\alpha$, így $FDG\sphericalangle = 2\alpha$. 1 pont

A DGF háromszögben $2\alpha \neq \alpha$, különben $\alpha = 0^\circ$ lenne, ami lehetetlen, ezért csak $DGF\sphericalangle = \alpha$ vagy $DGF\sphericalangle = 2\alpha$ lehetséges. 1 pont

Az első esetben $\alpha + \alpha + 2\alpha = 4\alpha = 180^\circ$, azaz a trapéz szögei 90°-osak (téglalap). 1 pont

A második esetben $\alpha + 2\alpha + 2\alpha = 5\alpha = 180^\circ$, azaz a trapéz szögei 72°, 72°, 108°, 108°-osak. 1 pont

Összesen: **6 pont**

2. Mutassuk meg, hogy tetszőleges a, b, c valós számok esetén a következő számok között biztosan van legalább egy olyan, amelyik nem negatív: $4a^2 - 2b + 1$, $b^2 + 2c + 4$, és $c^2 - 8a + 1$. **8 pont**

Megoldás:

Vizsgáljuk a három szám összegét:

$$S = 4a^2 - 2b + 1 + b^2 + 2c + 4 + c^2 - 8a + 1$$ 1 pont

Végezzük el az alábbi csoportosítást:

$$S = (4a^2 - 8a + 4) + (b^2 - 2b + 1) + (c^2 + 2c + 1)$$ 1 pont

Teljes négyzeteket kialakítva:

$$S = (2a - 2)^2 + (b - 1)^2 + (c + 1)^2$$ 3 pont

A kapott összeg biztosan nem negatív, mivel a tagok mindegyike legalább nulla. 1 pont

Ha a három szám összege nem negatív, akkor közöttük van legalább egy olyan, amelyik nem negatív, hiszen ha mindhárom szám negatív lenne, akkor az összegük is 0-nál kisebb lenne. 2 pont

Összesen: **8 pont**

3. Egy iskola igazgatója összehívta az osztályok küldöttjeit (összesen 32 tanulót), hogy választ kapjon az alábbi kérdésekre:

a) Kezdődjön-e fél órával később a tanítás?
b) Jó lenne-e, ha a testnevelés órák a tízórai szünet előtt lennének megtartva?
c) Szeretnék-e a tanulók, ha a rajzórák szerdánként lennének?

A szavazásról a következőket tudjuk. A korai testnevelés órákat csak 16-an támogatták, az első kérdésre 17, míg a harmadikra 25 igen szavazat érkezett. Az első kérdésre igennel válaszolók közül 8-an nem akartak korán tornázni, 6-an pedig szerdán rajzolni. Azok, akik a második és harmadik kérdésre is igennel válaszoltak 12-en voltak, de ennek a társaságnak a fele nem szerette volna, ha a tanítás később kezdődik. Hány küldött szavazott minden kérdésre igennel? Hányan szavaztak minden kérdésre nemmel? **8 pont**

1. megoldás:

Tekintsük az alábbi táblázatban a lehetséges szavazatfajtákat!

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
i, i, i	i, i, n	i, n, i	i, n, n	n, i, i	n, i, n	n, n, i	n, n, n

A feltételek alapján:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 17 \\ x_1 + x_3 + x_5 + x_7 &= 25 \\ x_1 + x_2 + x_5 + x_6 &= 16 \\ x_3 + x_4 &= 8 \\ x_2 + x_4 &= 6 \\ x_1 + x_5 &= 12 \end{aligned}$$

4 pont

Az egyenletrendszert megoldva az egyes szavazattípusokra kapjuk, hogy:

$$x_1 = 6, \quad x_2 = 3, \quad x_3 = 5, \quad x_4 = 3, \quad x_5 = 6, \quad x_6 = 1, \quad x_7 = 8$$

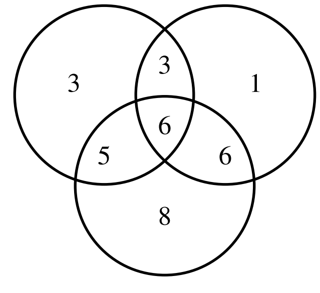
2 pont

Tehát 6 küldött szavazott mindhárom kérdésre igennel. 1 pont

A kapott értékeket összeadva 32-t kapunk, tehát nem volt olyan küldött, aki minden kérdésre nemmel szavazott ($x_8 = 0$). 1 pont

Összesen: **8 pont**

2. megoldás: A feladat Venn-diagram felrajzolásával és kitöltésével is megoldható.



Az ábráról leolvasható, hogy 6 fő válaszolt mindhárom kérdésre igennel és nem volt olyan, személy aki minden kérdésre nemmel válaszolt volna.

Pontozás: Az ábrába **minden indoklással megadott helyesen beírt számért** 1 pont adható, további 1 pont jár annak megválaszolásáért, hogy nem volt olyan tanuló, aki minden kérdésre nemmel válaszolt. Az indoklás nélkül kitöltött Venn-diagramért és a feltett kérdések szöveges megválaszolásáért $3 + 1$ pont adható.

Összesen: **8 pont**

4. Az osztály matematika órán a faktoriális fogalmát tanulta: egy n pozitív egész szám faktoriálisa az n-nél nem nagyobb pozitív egészek szorzatát jelenti, jelölése $n!$. Kiszámolták 1-től 20-ig a pozitív egész számok szorzatát, majd a kapott 19-jegyű számot felírták a táblára. Szünetben azonban valaki letörölt néhány számjegyet, így most a táblán a következő egyenlőség látható:

$$20! = 243290200\square1766\square\square\square\square\square,$$

ahol a $\square$-ek helyén álló számjegyek már nem olvashatóak. **8 pont**

Határozd meg a hiányzó számjegyeket a szorzat kiszámolása nélkül!

Megoldás:

A 20! prímtényezős felbontásában az 5 kitevője 4. 1 pont

A 2 kitevője: $\left[\frac{20}{2}\right] + \left[\frac{20}{4}\right] + \left[\frac{20}{8}\right] + \left[\frac{20}{16}\right] = 18$ (elég annyi is, hogy legalább 7). 1 pont

Így $10^4 \mid 20!$, de $10^5 \nmid 20!$, vagyis 20! pontosan 4 db nullára végződik. 1 pont

$\frac{20!}{10^4}$ osztható 8-cal, így az utolsó 3 jegyéből álló háromjegyű szám, azaz a $66\square$ is osztható 8-cal. Az egyetlen ilyen szám a 664. 2 pont

Mivel 20! osztható 9-cel, így a számjegyeinek összege is osztható 9-cel. Ha a hiányzó számjegyet x-szel jelöljük, akkor ez az összeg: $2 + 4 + 3 + 2 + 9 + 2 + x + 1 + 7 + 6 + 6 + 4 = 46 + x$.

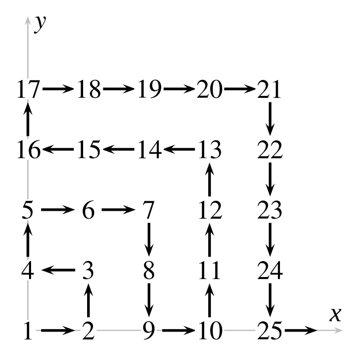
Ez alapján x egyetlen lehetséges értéke a 8. 2 pont

Tehát a keresett szám: 2 432 902 008 176 640 000. 1 pont

Összesen: **8 pont**

5. Az első síknegyedben a $(0; 0)$ pontból kiindulva sorra vesszük az egész koordinátájú pontokat az ábra szerint. (Tehát például a $(2; 1)$ pont a 8-as sorszámot kapja.)

a) Határozd meg a $(12; 2017)$ pont sorszámát!
b) Melyik ponthoz rendeljük a 2018-as sorszámot?



10 pont

Megoldás:

a) Egy $(0; 2k - 1)$ alakú pont sorszáma $(2k)^2$, mivel abba a pontba érve épp egy $2k - 1$ élhosszúságú négyzet egész koordinátájú pontjait járjuk be. Tehát a $(0; 2017)$ pont sorszáma: $2018^2 = 4\,072\,324$. 3 pont

A $(12; 2017)$ pont pedig ennél 12-vel kisebb sorszámot kap, azaz $2018^2 - 12 = 4\,072\,312$-t. 2 pont

b) A legnagyobb 2018-nál kisebb négyzetszám a $44^2 = 1936$. A $(2k)^2$ alakú sorszámok az y-tengelyen helyezkednek el (lásd a) rész). Így az 1936-os sorszámot a $(0; 43)$ pont kapja. 2 pont

Emiatt a $(0; 44)$ pont sorszáma 1937, a $(44; 44)$ ponté pedig $1937 + 44 = 1981$. Innen még $2018 - 1981 = 37$-et kell lépni lefelé, így a 2018-as sorszámot a $(44; 7)$ ponthoz rendeljük. 3 pont

Összesen: **10 pont**