

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2018/2019-es tanév

1. forduló

Haladók II. kategória

Feladatok

1. Melyek azok a p prímek, amelyekre $(p^2 + 11)$ -nek pontosan 6 pozitív osztója van? **7 pont**
2. Az $ABCD$ trapéz AB alapja 5, CD alapja 3 egység. A BC szár hossza 8 egység. Legyen F a DA szár felezőpontja. Bizonyítsuk be, hogy $FB^2 + FC^2$ állandó, és adja meg ennek az állandónak az értékét! **7 pont**
3. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán:
- $$\begin{cases} x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy} = 10 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases} \quad \mathbf{7 \text{ pont}}$$
4. Adott a síkon egy irány. Vegyünk fel a síkon 1001 téglalapot úgy, hogy mindegyik téglalap két oldala párhuzamos legyen ezzel az iránnyal. Legfeljebb hány diszjunkt tartományra oszthatják ezek a téglalapok a síkot? **7 pont**
5. Az ABC háromszög AB oldalának egy belső pontja P , valamint az AF súlyvonal és a CP szakasz metszéspontja N . Mekkora lehet az ABC háromszög területe, ha az APN háromszög területe 1,6, a CFN háromszög területe pedig 3 területegység? **7 pont**