Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2018/2019-es tanév

1. forduló

Haladók II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Melyek azok a p prímek, amelyekre $(p^2 + 11)$-nek pontosan 6 pozitív osztója van? **7 pont**

1. megoldás. Ha $p = 2$, akkor $p^2 + 11 = 15$, aminek csak 4 osztója van, így ez nem megoldás. Ha $p = 3$ akkor $p^2 + 11 = 3^2 + 11 = 20$, aminek 6 osztója van, így ez jó megoldás. 1 pont

A továbbiakban megmutatjuk, hogy $p > 3$ megfelelő prím nincs.

Egy egésznek pontosan 6 pozitív osztója csak két esetben lehet:

(I) ha q^5 alakú, vagy (II) ha q^2r alakú, ahol q és r különböző prímek. 2 pont

Mivel p páratlan, ezért felírható $2k + 1$ alakban, ahol k pozitív egész. Ekkor $p^2 + 11 = 4k^2 + 4k + 1 + 11 = 4(k^2 + k + 3)$, tehát osztható 4-gyel. 1 pont

A 4-gyel való oszthatóság miatt (I) és (II) esetben is csak $q = 2$ lehetséges. Ebből az (I) esetben $p^2 + 11 = 2^5 = 32$, ahonnan p-re nem kapunk megoldást. 1 pont

A (II) esetben, mivel $p > 3$, ezért $p = 3l \pm 1$ alakba írható (ahol l pozitív egész), de ekkor $p^2 + 11 = 9l^2 \pm 6l + 1 + 11 = 3(3l^2 \pm 2l + 4)$, tehát osztható 3-mal is, amiből $r = 3$ következik. Ekkor $p^2 + 11 = 2^2 \cdot 3 = 12$, ahonnan p-re szintén nem kapunk megoldást (hiszen az 1 nem prímszám). 2 pont

Tehát valóban egyetlen megfelelő prím van, a $p = 3$.

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. Ha $p = 2$, akkor $p^2 + 11 = 15$, aminek csak 4 osztója van, így ez nem megoldás. Ha $p = 3$ akkor $p^2 + 11 = 3^2 + 11 = 20$, aminek 6 osztója van, így ez jó megoldás. 1 pont

A továbbiakban megmutatjuk, hogy $p > 3$ megfelelő prím nincs. Végezzük el a következő átalakítást: $p^2 + 11 = (p + 1)(p - 1) + 12$, 2 pont

Mivel p páratlan, a $p + 1$ és $p - 1$ is páros, és $p > 3$ miatt (pontosan) az egyik osztható 3-mal is. Ezért a $(p + 1)(p - 1)$ és innen $p^2 + 11$ is osztható 12-vel, azaz $p^2 + 11 = 12k$ (k egész). 2 pont

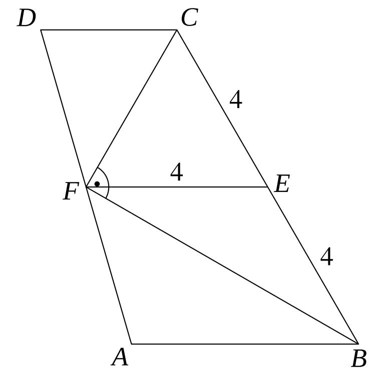
De $p > 3$ miatt $k \geq 2$ szintén teljesül, a 12-nek 6 pozitív osztója van, így a $p^2 + 11 = 12k$-nak biztosan 6-nál több osztója van. 2 pont

Tehát valóban egyetlen megfelelő prím van, a $p = 3$.

Összesen: **7 pont**

2. Az $ABCD$ trapéz AB alapja 5, CD alapja 3 egység. A BC szár hossza 8 egység. Legyen F a DA szár felezőpontja. Bizonyítsuk be, hogy $FB^2 + FC^2$ állandó, és adja meg ennek az állandónak az értékét! **7 pont**

1. megoldás. A trapéz középvonalának hossza $\frac{5+3}{2} = 4$ egység. 1 pont



Ez azt jelenti, hogy a BC szár E felezőpontja 4 egység távol van B-től, C-től és F-től is, azaz F rajta van egy E középpontú, BC átmérőjű körön. 2 pont

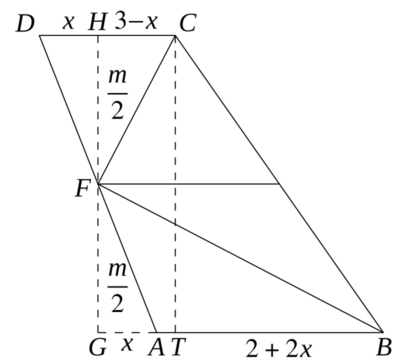
Thalész tétele miatt a BFC háromszög derékszögű, a derékszög az F csúcsnál van. 2 pont

Ezért Pitagorasz tétele alapján $FB^2+FC^2 = 8^2 = 64$, ami állandó. 2 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. Rajzoljuk meg a trapéz C csúcson, illetve az F ponton átmenő magasságát! Mivel az F pont felezőpont, ezért felezi a magasságot, és az alapok egyenesét A és D csúcsoktól egyenlő távolságra metszi, jelöljük ezt a távolságot x-szel. 1 pont

Ennek megfelelően:



$$HC = 3 - x$$
$$GB = 5 + x$$
$$TB = 2 + 2x$$

1 pont

Fontos megjegyezni, hogy x előjeles távolság, ahol az előjel a trapéz szögeitől függ. Ez azonban a megoldást érdemben nem befolyásolja. 1 pont

Pitagorasz tétele alapján az alábbi egyenlőségek írhatók fel:

$$FB^2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2 + (5+x)^2$$
$$FC^2 = \left(\frac{m}{2}\right)^2 + (3-x)^2$$
$$BC^2 = 64 = m^2 + (2+2x)^2$$

1 pont

Az első két egyenlet összegét véve és a harmadik egyenletet átalakítva:

$$\frac{m^2}{2} + 2x^2 + 4x = 30$$

és

$$FB^2 + FC^2 = \frac{m^2}{2} + 2x^2 + 4x + 34$$

2 pont

Így $FB^2 + FC^2 = 30 + 34 = 64$, állandó. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\begin{cases} x\sqrt{xy} + y\sqrt{xy} = 10 \\ x^2 + y^2 = 17 \end{cases}$$ **7 pont**

1. megoldás.

Vezessük be az $a = x + y$ és a $b = \sqrt{xy}$ új ismeretleneket. Így az egyenletrendszerünk:

$$\begin{cases} ab = 10 \\ a^2 - 2b^2 = 17 \end{cases}$$ 2 pont

Az első egyenletből b-t kifejezve és a másodikba beírva az

$$a^4 - 17a^2 - 200 = 0$$

másodfokúra visszavezethető egyenlethez jutunk, amelynek megoldásai $a^2 = -8$ és $a^2 = 25$. 2 pont

Az első nem ad valós megoldást, a második esetben $a = 5$ és $b = 2$, vagy $a = -5$ és $b = -2$, de ez utóbbi a négyzetgyök definíciója miatt nem lehetséges.

Így az eredetinél lényegesen egyszerűbb

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 4 \end{cases}$$ 1-1 pont

egyenletrendszerhez jutunk, amelynek megoldásai: (1; 4), illetve (4; 1). 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. Az első egyenletet négyzetre emelve (szükséges, hogy az egyenlet bal oldala pozitív legyen): 1 pont

$$x^3y + xy^3 + 2x^2y^2 = 100$$

$$\left(x^2 + y^2\right)xy + 2(xy)^2 = 100$$ 1 pont

A második egyenletet felhasználva xy-ra másodfokú egyenlethez jutunk:

$$2(xy)^2 + 17(xy) - 100 = 0$$ 1 pont

Ennek megoldásai: $xy = 4$ vagy $xy = -12{,}5$, de a második megoldás a négyzetgyök definíciója alapján nem lehetséges. 1 pont

y-t kifejezve és a második egyenletbe beírva az $x^4 - 17x^2 + 16 = 0$ másodfokúra visszavezethető egyenlethez jutunk, amelynek megoldásai: $x^2 = 1$, vagy $x^2 = 16$. 1 pont

Ekkor a lehetséges megoldások: (1; 4); (4; 1); (−1; −4); (−4; −1), 1 pont
de az utolsó két számpár nem felel meg a négyzetre emelés előtti feltételnek. 1 pont

Összesen: **7 pont**

4. Adott a síkon egy irány. Vegyünk fel a síkon 1001 téglalapot úgy, hogy mindegyik téglalap két oldala párhuzamos legyen ezzel az iránnyal. Legfeljebb hány diszjunkt tartományra oszthatják ezek a téglalapok a síkot? **7 pont**

A téglalapok helyzetéből következik, hogy két ilyen téglalapnak legfeljebb 4 metszéspontja lehet. 1 pont

Vegyük fel a téglalapokat egyenként. Egy téglalap a korábbi tartományokat legfeljebb 2 részre osztja. Amikor berajzoljuk a k-adik téglalapot, akkor ennek az új téglalapnak a kerületén legfeljebb $4(k-1)$ metszéspont alakul ki. Ezek a metszéspontok a téglalap kerületét $4(k-1)$részre osztják. 1 pont

Ezek a részek már meglévő síkrészeket vágnak ketté, így a síkrészek száma $4(k-1)$-gyel nő. 1 pont

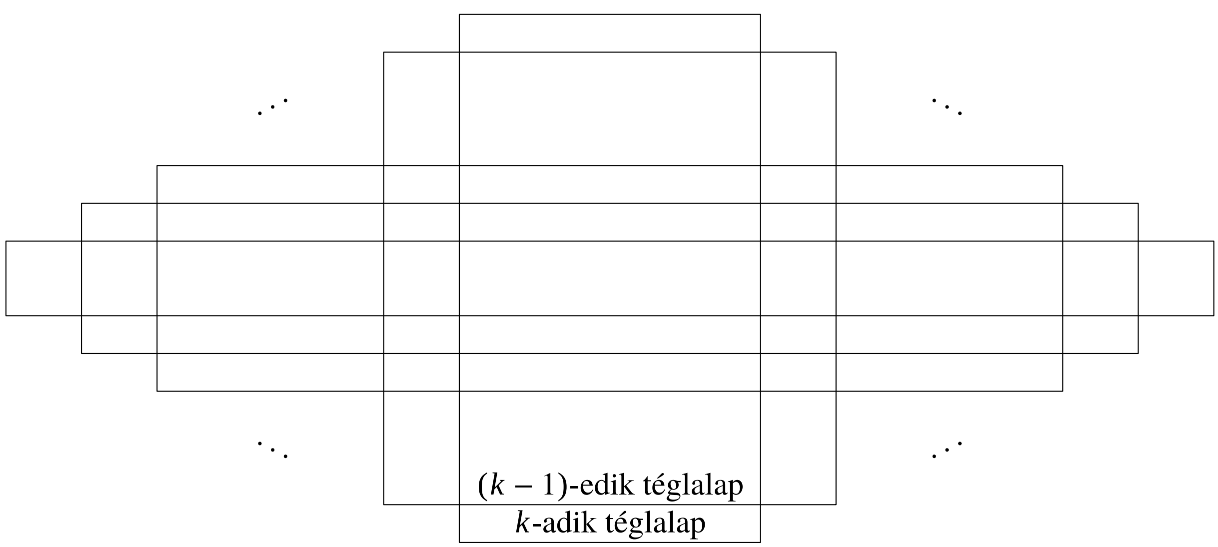
Ezért 1001 téglalap esetén a síkrészek száma legfeljebb:

$$2 + 4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + \ldots + 4 \cdot 1000.$$ 1 pont

A szorzatokból 4-et kiemelve és a zárójelben az összegzést Gauss-módszerrel elvégezve kapjuk, hogy

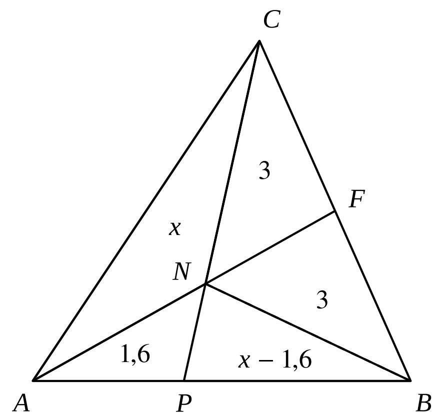
$$2 + 4 \cdot 1001 \cdot 500 = 2 + 2002 \cdot 1000 = 2\,002\,002.$$ 2 pont

Ez tényleg elérhető például a következő módon: a k-adik téglalap „vízszintes” oldala legyen feleakkora, „függőleges” oldala legyen kétszer akkora, mint az előző téglalap megfelelő oldala, valamint az összes téglalap középpontja legyen ugyanaz a pont. 1 pont



Összesen: **7 pont**

5. Az ABC háromszög AB oldalának egy belső pontja P, valamint az AF súlyvonal és a CP szakasz metszéspontja N. Mekkora lehet az ABC háromszög területe, ha az APN háromszög területe 1,6, a CFN háromszög területe pedig 3 területegység? **7 pont**



Megoldás. Jelölje az ANC háromszög területét x. Mivel F az AC szakasz felezőpontja, ezért NBC háromszögben NF súlyvonal, tehát $T_{NBF\triangle} = T_{NCF\triangle} = 3$. 1 pont

Mivel az ABC háromszögben AF súlyvonal, ezért $T_{ABF\triangle} = T_{ACF\triangle} = 3 + x$, ahonnan $T_{NPB\triangle} = x - 1{,}6$. 2 pont

Az N illeszkedik CP szakaszra, ezért ABC és ABN háromszögek területét CP szakasz azonos $\frac{BP}{PA}$ arányban osztja két részre, azaz $\frac{T_{PBC\triangle}}{T_{PAC\triangle}} = \frac{T_{PBN\triangle}}{T_{PAN\triangle}} = \frac{BP}{PA}$. 2 pont

Behelyettesítés után: $\frac{3+3+x-1{,}6}{x+1{,}6} = \frac{x-1{,}6}{1{,}6}$. Az egyenletet rendezve $5x^2 - 8x - 48 = 0$ adódik, amelynek pozitív megoldása csak az $x = 4$. 1 pont

Az ABC háromszög területe tehát $2 \cdot (3 + x) = 14$ területegység. 1 pont

Összesen: **7 pont**