# Haladók II. kategória 3. (döntő) forduló

**1.** Keressük meg azokat a pozitív egészekből álló rendezett $(a; b)$ számpárokat, amelyekre az

$$\frac{a^3b-1}{a+1} \quad \text{és a} \quad \frac{b^3a+1}{b-1}$$

kifejezés értéke is pozitív egész szám. **7 pont**

**2.** Egy háromszögnek három különböző nagyságú hegyesszöge van. Képezzük mindegyik oldalánál az oldalfelezési pont és a magasságvonal talppontja közti távolság és az oldalhoz tartozó magasság hányadosát. Bizonyítsuk be, hogy az egyik hányados a másik két hányados összege. **7 pont**

**3.** Egy 1 egység oldalú szabályos tízszöget néhány 1 egység oldalú rombuszra osztunk fel. Két rombuszra azt mondjuk, hogy ugyanolyan fajta, ha egybevágók. Bizonyítsd be, hogy a tízszög bármely, 1 egység oldalú rombuszokra történő felosztásában ugyanannyi rombusz szerepel, sőt az egyes fajta rombuszokból is minden esetben ugyanannyi van! **7 pont**

## Megoldások és javítási útmutató

**1.** Keressük meg azokat a pozitív egészekből álló rendezett $(a; b)$ számpárokat, amelyekre az

$$\frac{a^3b-1}{a+1} \quad \text{és a} \quad \frac{b^3a+1}{b-1}$$

kifejezés értéke is pozitív egész szám. **7 pont**

**Megoldás.** A megadott feltételek mellett az első törtet vizsgálva $a^3+1=(a+1)(a^2-a+1)$, tehát

$$a+1 \mid a^3+1.$$

Mivel $a+1 \mid a^3b-1$, ezért $a+1 \mid (a^3+1)+(a^3b-1)=a^3(b+1)$.

Mivel $(a; a+1)=1$, ezért ebből $a+1 \mid b+1$ adódik. 2 pont

A második törtet vizsgálva és figyelembe véve, hogy a tört értéke pozitív egész szám, ezért $b \geqslant 2$ $(b \in \mathbb{N}^+)$, illetve $b^3-1=(b-1)(b^2+b+1)$, tehát

$$b-1 \mid b^3-1.$$

Mivel $b-1 \mid ab^3+1$, ezért $b-1 \mid (b^3-1)+(ab^3+1)=b^3(a+1)$.

Mivel $(b-1; b)=1$, ezért ebből $b-1 \mid a+1$ adódik. 2 pont

A kapott két feltételt egyesítve $b-1 \mid a+1 \mid b+1$, tehát

$$b-1 \mid b+1.$$

Ebből $b-1 \mid (b+1)-(b-1)=2$, ezért $b_1=2$, vagy $b_2=3$. 1 pont

$b=2$ esetén $a+1 \mid 3$. Ez a feltétel $a \in \mathbb{N}^+$ esetén csak az $a=2$ esetben teljesül. 1 pont

$b=3$ esetén $a+1 \mid 4$. Ez a feltétel $a \in \mathbb{N}^+$ esetén csak az $a=1$, vagy az $a=3$ esetben teljesül.

Így a megoldásként kapott számpárok: $(2; 2)$, $(1; 3)$, $(3; 3)$. 1 pont

**Összesen:** **7 pont**

**2.** Egy háromszögnek három különböző nagyságú hegyesszöge van. Képezzük mindegyik oldalánál az oldalfelezési pont és a magasságvonal talppontja közti távolság és az oldalhoz tartozó magasság hányadosát. Bizonyítsuk be, hogy az egyik hányados a másik két hányados összege. **7 pont**

**1. megoldás.** A háromszög oldalai különbözőek, legyen $c > a > b$.

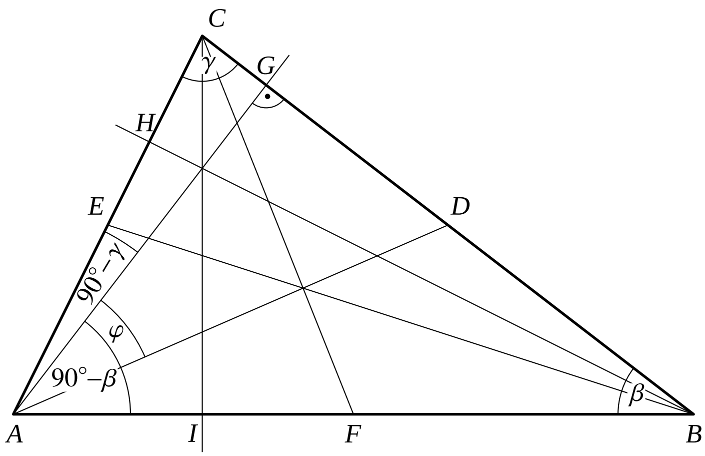
Írjuk fel Pitagorasz tételét az $ABG$ és az $AGC$ háromszögekben az $AG$ befogóra:

$$AG^2 = AB^2 - BG^2 = AC^2 - GC^2.$$

Rendezzük át:

$$AB^2 - AC^2 = BG^2 - GC^2 = (BG+GC)(BG-GC). \qquad (1)$$ 2 pont

$G$ a $BC$ szakaszon van, így $BG + GC = BC$, másrészt $BG - GC = (BD + DG) - (CD - DG) =$ $= 2DG$, hiszen $D$ pont $BC$ felezési pontja, azaz $BD = CD$. 2 pont




A kapott eredményeket (1)-be beírva, rendezve:

$$DG = \frac{AB^2 - AC^2}{2 \cdot BC} = \frac{c^2 - b^2}{2a},$$

azaz

$$\frac{DG}{AG} = \frac{c^2 - b^2}{2am_a} = \frac{c^2 - b^2}{4T}.$$ 1 pont

Hasonlóan felírva a hányadosokat:

$$\frac{HE}{BH} = \frac{c^2 - a^2}{4T} \quad \text{és} \quad \frac{IF}{CI} = \frac{a^2 - b^2}{4T}$$ 1 pont

Így adódik a bizonyítandó állítás, hiszen $\dfrac{HE}{BH} + \dfrac{IF}{CI} = \dfrac{DG}{AG}$. 1 pont

**Összesen:** **7 pont**

**2. megoldás.**

A háromszög oldalai különbözőek, legyen $c > a > b$.

$BG - GC = (BD + DG) - (CD - DG) = 2DG$, hiszen $D$ pont $BC$ felezési pontja, azaz $BD = CD$. 2 pont

Legyen $DAG\sphericalangle = \varphi$, ekkor

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{DG}{AG} = \frac{BG - GC}{2AG} = \frac{1}{2}\left(\frac{BG}{AG} - \frac{GC}{AG}\right) = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}(90^\circ - \beta) - \operatorname{tg}(90^\circ - \gamma)\right).$$ 3 pont

Hasonlóan felírva a hányadosokat:

$$\frac{HE}{BE} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}(90^\circ - \alpha) - \operatorname{tg}(90^\circ - \gamma)\right) \quad \text{és} \quad \frac{IF}{CI} = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tg}(90^\circ - \beta) - \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)\right).$$ 1 pont

Így adódik a bizonyítandó állítás, hiszen $\dfrac{HE}{BE} + \dfrac{IF}{CI} = \dfrac{DG}{AG}$. 1 pont

**Összesen:** **7 pont**

**3.** Egy 1 egység oldalú szabályos tízszöget néhány 1 egység oldalú rombuszra osztunk fel. Két rombuszra azt mondjuk, hogy ugyanolyan fajta, ha egybevágók. Bizonyítsd be, hogy a tízszög bármely, 1 egység oldalú rombuszokra történő felosztásában ugyanannyi rombusz szerepel, sőt az egyes fajta rombuszokból is minden esetben ugyanannyi van! **7 pont**

**Megoldás.** Két, a felosztásban szereplő rombuszt nevezzünk szomszédosnak, ha van közös oldaluk, vagy egy-egy oldaluk legalább részben egybeesik (azaz a két oldalnak van közös szakasza).

A szabályos tízszög oldalai legyenek $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{10}$.

Legyen $ABCD$ egy, a felosztásban szereplő $R$ rombusz. Ennek például az $AB$ oldala vagy a tízszög egyik oldalára esik, vagy az $AB$ oldalt átlépve egy szomszédos $R_1$ rombuszra jutunk. Ennek $AB$-vel párhuzamos oldala vagy a tízszög oldalára esik, vagy az $AB$-vel párhuzamos oldalát átlépve egy $R_1$-gyel szomszédos, $R_2$ rombuszra jutunk. Az $R_2$ rombusz $AB$-vel párhuzamos oldala vagy a tízszög oldalára esik, vagy ha nem, akkor ezt az oldalt átlépve egy szomszédos, $R_3$ rombuszra jutunk és így tovább. Az eljárás akkor szakad meg, ha egy olyan rombuszhoz jutunk, amelynek $AB$-vel párhuzamos oldala a tízszög valamelyik $a_i$ oldalára illeszkedik.

Ezt az eljárást az $ABCD$ rombusz $CD$ oldalára is elvégezve néhány egymáshoz csatlakozó rombuszon végig lépkedve egy olyan rombuszhoz jutunk, amelynek $CD$-vel (és ezért $AB$-vel is) párhuzamos oldala a tízszög valamely $a_j$ oldalára esik. Mivel $a_i \parallel AB \parallel CD \parallel a_j$, azt kapjuk, hogy $a_i$ és $a_j$ a tízszög két párhuzamos oldala, azaz ezek a szabályos tízszög szemközti oldalai.

Tehát az $ABCD$ rombusz a tízszög két szemközti, $AB$-vel és $CD$-vel párhuzamos oldalát összekötő, egymáshoz csatlakozó rombuszokból álló út egy eleme.

Teljesen hasonlóan belátható, hogy az $ABCD$ rombusz a tízszög két szemközti, $BC$-vel és $AD$-vel párhuzamos oldalát összekötő, egymáshoz csatlakozó rombuszokból álló útnak is eleme.

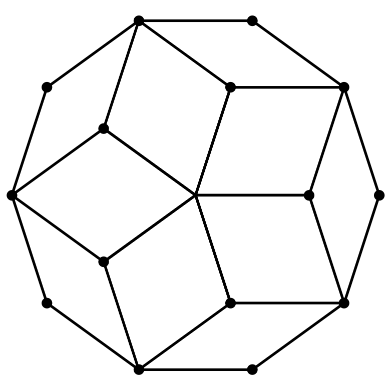
Ebből az is látszik, hogy a felosztásban szereplő bármely rombusz oldalai párhuzamosak a tízszög valamelyik két oldalával. 2 pont

A szabályos tízszög bármely két oldalegyenese vagy párhuzamos, vagy 36°-os vagy 72°-os szöget zár be, így a felosztásban kétféle rombusz szerepel, az egyiknek 36° és 144°-os szögei (ez legyen 1. fajta), a másiknak 72°-os és 108°-os szögei vannak (ez a 2. fajta). 1 pont

Két olyan út, amelyek a tízszög két-két szemközti oldalát kötik össze, nyilván keresztezi egymást, ezért meghatároz legalább egy rombuszt.

1. fajta rombusz az $a_1$–$a_6$ és $a_2$–$a_7$, $a_2$–$a_7$ és $a_3$–$a_8$, $a_3$–$a_8$ és $a_4$–$a_9$, $a_4$–$a_9$ és $a_5$–$a_{10}$, illetve $a_5$–$a_{10}$ és $a_1$–$a_6$ utak metszetében található, és az öt útpár mindegyikének a metszetében van legalább egy rombusz, ezért a felosztásban legalább öt darab 1. fajta rombusz van.

2. fajta rombusz az $a_1$–$a_6$ és $a_3$–$a_8$, $a_2$–$a_7$ és $a_4$–$a_9$, $a_3$–$a_8$ és $a_5$–$a_{10}$, $a_4$–$a_9$ és $a_6$–$a_1$, végül $a_5$–$a_{10}$ és $a_7$–$a_2$ utak metszetében van, ebből is legalább öt darab van tetszőleges felosztás esetén. 2 pont



Az ábrán látható egy olyan felosztás, amelyben pontosan 5 darab 1. fajta és pontosan 5 darab 2. fajta, tehát összesen 10 darab rombusz szerepel. 1 pont

Ha a kétféle rombusz területe $T$, illetve $t$, akkor a tízszög területe $5T + 5t$. Ha egy felosztásban valamelyik fajta rombuszból 5-nél több lenne, akkor a másikból nyilván 5-nél kevesebb kellene legyen, hiszen a tízszög területe adott. Ám ez lehetetlen, mert mindkét fajtából van legalább öt. Tehát egyikből sem lehet ötnél több, azaz mindkét fajtából pontosan öt darab van, bármely felosztás esetén. 1 pont

**Összesen:** **7 pont**

**Megjegyzés.** A tízszög összes lehetséges 1 egység oldalú rombuszokra történő olyan felosztása, amelyek forgatással nem vihetők egymásba, az alábbi ábrán látható. Az utolsó kettő egymás tükörképe, a többi ábra eleve tengelyesen szimmetrikus.