Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2018/2019-es tanév
1. forduló
Haladók III. kategória

Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan konvex nyolcszög, amelynek minden belső szöge ugyanakkora, és az oldalai valamilyen sorrendben 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, illetve 8 egység hosszúak. **7 pont**

2. Mely x, y pozitív számokra teljesül a következő egyenlet?

$$x^2 + y^2 + x + y = 2\sqrt{x^3 + y^3 + x^2y^2 + xy}$$ **7 pont**

3. Adott egy rögzített AB szakasz, egy vele nem párhuzamos e egyenes, és egy $\mathbf{v}$ vektor, ami az e-vel párhuzamos és AB-vel egyenlő hosszú. Az egyenes egy tetszőleges P pontjához jelöljük ki azt az R pontot, amelyre $\overrightarrow{PR} = \mathbf{v}$. Az $\overrightarrow{AB}$ vektort a $\overrightarrow{PR}$ vektorba vivő elforgatás középpontja legyen O. Milyen ponthalmazt alkotnak az O pontok, ha P végigfut az egyenesen? **7 pont**

4. Vegyünk egy tíz darab különböző pozitív egész számból álló halmazt. Képezzük minden nem üres részhalmaza esetén a részhalmazban szereplő számok összegét! Egyelemű halmaz esetén az összeg maga a szám. Igazoljuk, hogy a tíz szám megválasztható úgy, hogy 959 különböző összeg fordul elő! **7 pont**

5. A pozitív egész számokból álló (p, a, b, c) számnégyest nevezzük különlegesnek, ha teljesülnek rá az alábbi tulajdonságok:

a) p páratlan prímszám,
b) a, b, c különböző számok,
c) $ab + 1$, $bc + 1$ és $ca + 1$ is osztható p-vel.

Bizonyítsuk be, hogy $p+2 \leqslant \dfrac{a+b+c}{3}$, és adjunk példát arra, hogy mikor áll fenn az egyenlőség. **7 pont**