Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2018/2019-es tanév
1. forduló
Haladók III. kategória

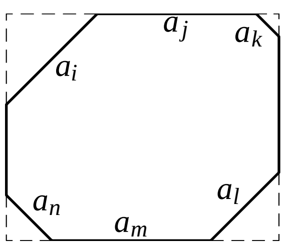
Megoldások és javítási útmutató

1. Bizonyítsuk be, hogy nem létezik olyan konvex nyolcszög, amelynek minden belső szöge ugyanakkora, és az oldalai valamilyen sorrendben 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, illetve 8 egység hosszúak. **7 pont**

Megoldás.

Indirekt tegyük fel, hogy létezik ilyen nyolcszög! Ekkor annak minden szöge 135°, ezért a külső szögek 45° nagyságúak. Ezért minden második oldalt meghosszabbítva a nyolcszöget egy téglalapba lehet foglalni, amelynek csúcsaiban egyenlő szárú derékszögű háromszögek egészítik ki a nyolcszöget. 2 pont

Az a_i átfogójú háromszög befogója $\frac{a_i}{\sqrt{2}}$, ahol a_i 1 és 8 közötti egész szám. 1 pont



A téglalap oldalai ilyen befogókból, illetve 1 és 8 közötti oldalhosszúságú nyolcszög-oldalakból állnak össze. 1 pont

Mivel a téglalap szemközti oldalai egyenlő hosszúak, ezért

$$\frac{a_i}{\sqrt{2}} + a_j + \frac{a_k}{\sqrt{2}} = \frac{a_l}{\sqrt{2}} + a_m + \frac{a_n}{\sqrt{2}},$$

ahol a_i, a_j, a_k, a_l, a_m és a_n egész számok. 1 pont

Ebből $\sqrt{2} = \frac{a_l + a_n - a_i - a_k}{a_j - a_m}$, azaz $\sqrt{2}$ kifejezhető két egész szám hányadosaként, ami ellentmond annak, hogy a $\sqrt{2}$ irracionális 1 pont

Ellentmondásra jutottunk, tehát hamis az indirekt feltétel, vagyis nem létezik ilyen nyolcszög. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Mely x, y pozitív számokra teljesül a következő egyenlet?

$$x^2+y^2+x+y=2\sqrt{x^3+y^3+x^2y^2+xy} \qquad \textbf{7 pont}$$

Megoldás. Az egyenletet 2-vel osztva és a jobb oldalt szorzattá alakítva:

$$\frac{(x^2+y)+(y^2+x)}{2}=\sqrt{(x^2+y)(y^2+x)} \qquad \text{2 pont}$$

Mivel a bal oldalon az (x^2+y) és az (y^2+x) tagok számtani közepe áll, míg jobb oldalon ugyanezen tagok mértani közepe, a bal oldal nagyobb vagy egyenlő, mint a jobb oldal, és az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a tagok egyenlőek. Jelen esetben:

$$x^2+y=y^2+x \qquad \text{2 pont}$$

Innen: $x^2-y^2+y-x=0$, majd nevezetes szorzattal és kiemeléssel megint csak szorzattá alakítva:

$$(x-y)(x+y-1)=0 \qquad \text{1 pont}$$

Azaz az egyenlet megoldásai az x és $y=x$, ahol $0<x$, 1 pont

illetve az x és $y=1-x$, ahol $0<x<1$ alakú számpárok. 1 pont

Megjegyzés. Mindkét (nemnegatív) oldal négyzetre emelésével, 0-ra redukálással és szorzattá alakítással azt kapjuk, hogy

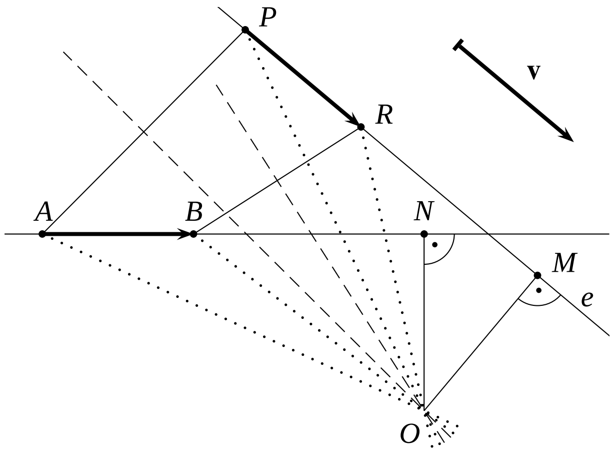
$$(x^2-2xy+y^2)(x^2+2xy+y^2-2x-2y+1)=0 \Rightarrow (x-y)^2(x+y-1)^2=0,$$

ami nyilván ugyanarra a végeredményre vezet, mint az iménti.

Összesen: **7 pont**

3. Adott egy rögzített AB szakasz, egy vele nem párhuzamos e egyenes, és egy $\mathbf{v}$ vektor, ami az e-vel párhuzamos és AB-vel egyenlő hosszú. Az egyenes egy tetszőleges P pontjához jelöljük ki azt az R pontot, amelyre $\overrightarrow{PR} = \mathbf{v}$. Az $\overrightarrow{AB}$ vektort a $\overrightarrow{PR}$ vektorba vivő elforgatás középpontja legyen O. Milyen ponthalmazt alkotnak az O pontok, ha P végigfut az egyenesen? **7 pont**

Megoldás.

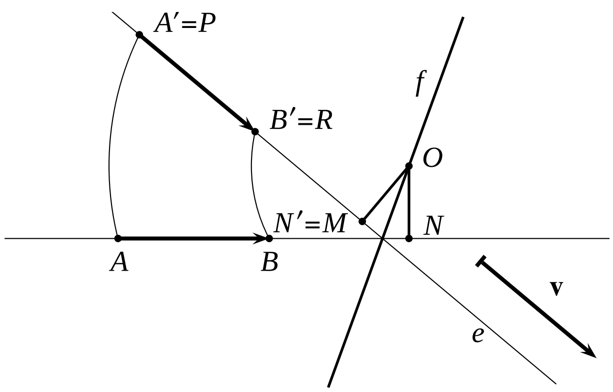


Az elforgatás során az A pont P-be, a B pont R-be kerül. A forgatás középpontja az AP szakasz felező merőlegesén és a BR szakasz felező merőlegesén is rajta kell legyen, így ezek metszéspontja az O pont. 1 pont

Az ábrán az ABO és a PRO háromszögek egybevágók, mivel oldalaik hosszai rendre megegyeznek. 1 pont

Így megfelelő magasságaik hossza, az AB oldalhoz tartozó ON, illetve a PR oldalhoz tartozó OM is megegyeznek. 1 pont

Az $ON = OM$ egyenlőség azt jelenti, hogy O egyenlő távol van az AB egyenestől és az e egyenestől, tehát O rajta van a két egyenes által meghatározott szögtartományok egyik szögfelezőjén. (Ha $\mathbf{v}$-t ellentétesen irányítjuk, akkor O a másik szögfelezőn van.) 1 pont



Legyen O az f szögfelező egy tetszőleges pontja. Állítsunk merőlegest O-ból e-re és AB-re, ezek talppontjai M és N. Tekintsük azt az O körüli elforgatást, amely az N pontot M-be viszi. Ennél az AB egyenes képe éppen az e egyenes lesz, az AB-n lévő $\overrightarrow{AB}$ vektor képe az e egyenesen lévő vektor lesz, ennek a kezdőpontja lesz az a P, végpontja az az R pont, amelyre teljesül az, hogy O körül elforgatva $\overrightarrow{AB}$-t, éppen a $\overrightarrow{PR}$ vektort kapjuk. Tehát az f szögfelező összes pontja a keresett ponthalmazhoz tartozik. 3 pont

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. Az, hogy az O pont a szögfelezőn van, így is indokolható:

Az $\overrightarrow{AB}$ vektor képe az elforgatás során a $\overrightarrow{PR}$ vektor, ezért az AB egyenest az O pont körül elforgatva éppen a PR egyenest kapjuk. 1 pont

Ezért az O-ból az AB-re állított ON merőleges szakasz az elforgatáskor az O-ból a PR egyenesre állított OM merőleges szakaszba megy át, amely nyilván ON-nel egyenlő hosszúságú. 2 pont

Így O egyenlő távol van az AB és a PR egyenesektől, tehát rajta van a két egyenes egyik szögfelezőjén. 1 pont

4. Vegyünk egy tíz darab különböző pozitív egész számból álló halmazt. Képezzük minden nem üres részhalmaza esetén a részhalmazban szereplő számok összegét! Egyelemű halmaz esetén az összeg maga a szám. Igazoljuk, hogy a tíz szám megválasztható úgy, hogy 959 különböző összeg fordul elő! **7 pont**

Megoldás. Ha $a_1, a_2, \ldots, a_n$ egészek esetén x-féle összeg lép fel, akkor ha az $n+1$-edik számot nagyobbnak választjuk, mint az n darab szám összege, például $a_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} a_i + 1$, akkor az x-féle összeghez ezt az $n+1$-edik számot hozzáadva újabb x darab összeget kapunk, ezek az összegek különböznek egymástól, mert az eredeti x-féle összeg is különböző volt. 2 pont

Ezek az új összegek különböznek az eredeti összegektől, mert nagyobbak náluk. 1 pont

Az a_{n+1} mint összeg is különbözik az eredetiektől, mert nagyobb náluk, valamint az a_{n+1}-et tartalmazó összegektől, mert kisebb náluk. Így $(2x+1)$-féle összegünk van. 1 pont

Ha azt akarjuk, hogy 959 darab összeg lépjen fel, akkor ezen a módon visszafelé lépegetve 9 szám esetén 479, 8 számnál 239, 7-nél 119, 6-nál 59, 5-nél 29, 4-nél 14-féle összeg szükséges. 1 pont

Ez pedig megoldható, ha a 4 szám egy számtani sorozat 4 egymást követő tagja, ahol az első tag és a differencia relatív prímek. Például: 1, 3, 5, 7 esetén könnyen ellenőrizhető, hogy itt az összegek között csak a $3+5=1+7$ egyezés lép fel. 2 pont

Összesen: **7 pont**

5. A pozitív egész számokból álló (p, a, b, c) számnégyest nevezzük különlegesnek, ha teljesülnek rá az alábbi tulajdonságok:

a) p páratlan prímszám,

b) a, b, c különböző számok,

c) $ab+1$, $bc+1$ és $ca+1$ is osztható p-vel.

Bizonyítsuk be, hogy $p+2 \leqslant \frac{a+b+c}{3}$, és adjunk példát arra, hogy mikor áll fenn az egyenlőség. **7 pont**

Megoldás. Mivel a megadott feltételek a, b, c-re szimmetrikusak, ezért feltehetjük, hogy $a<b<c$. $p \mid bc+1$ és $p \mid ca+1 \Longrightarrow p \mid c(b-a)$.

Hasonlóképpen: $p \mid ca+1$, és $p \mid ab+1 \Longrightarrow p \mid a(c-b)$ 1 pont

$p \nmid a$, és $p \nmid c$, hiszen pl. $p \mid a$ esetén $p \mid ab$ és $p \mid ab+1$ feltételekből a $p \mid 1$ ellentmondáshoz jutnánk. Így p prímtulajdonságát felhasználva: $p \mid b-a$ és $p \mid c-b$ 1 pont

Az utóbbi oszthatósági feltételeket felhasználva:

$$b-a \geqslant p \quad \Longrightarrow b \geqslant a+p, \tag{1}$$

$$c-b \geqslant p \quad \Longrightarrow c \geqslant b+p \geqslant a+2p. \tag{2}$$

1 pont

Másrészt $a \geqslant 2$, hiszen $a=1$ esetén $p \mid b+1$ és $p \mid b-1 \Longrightarrow p \mid 2$, ami ellentmond annak, hogy p páratlan prímszám. 1 pont

Az (1), (2), majd később az $a \geqslant 2$ feltételek alapján:

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \frac{a+(a+p)+(a+2p)}{3} = a+p \geqslant p+2$$

1 pont

Az egyenlőség feltételei: $a=2$, $b=a+p$ és $c=a+2p$.

A $p \mid ca+1$ feltétel alapján $p \mid 4p+5 \Longrightarrow p \mid 5 \Longrightarrow p=5$. 1 pont

Így az egyetlen különleges számnégyes az $(5, 2, 7, 12)$. 1 pont

Összesen: **7 pont**