Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2018/2019-es tanév
2. (döntő) forduló
Haladók III. kategória

Feladatok

1. Tetszőleges n pozitív egész számra jelölje $f(n)$ az olyan $2n$-jegyű számok számát, amelyek megegyeznek az utolsó n számjegyükből alkotott szám négyzetével. Határozzuk meg az f függvény értékkészletét. **7 pont**

2. A különböző sugarú k_1 és k_2 körök az A és B pontokban metszik egymást. A k_1 kör A-beli érintője a C pontban metszi a k_2 kört, míg a k_2 kör A-beli érintője a D pontban metszi a k_1 kört. Az ACD háromszög A csúcsához tartozó belső szögfelezője a k_1 kört az E a k_2 kört az F pontban metszi. Az ACD háromszög A csúcsához tartozó külső szögfelezője a k_1 kört az X a k_2 kört az Y pontban metszi. Igazoljuk, hogy az XY szakasz felező merőlegese érinti a BEF háromszög körülírt körét. **7 pont**

3. Kezdő és Második felírják az $1; 2; 3; \ldots; 609; 610$ számokat egymás után egy papírra, majd a következő pasziánsz-játékot játszák:

- Kezdő a saját i-edik lépése során bekarikázza a legkisebb még be nem karikázott számot, majd
- Második a saját i-edik lépése során bekarikázza a Kezdő által utoljára bekarikázott számnál i-vel nagyobb számot.

  A játék elején a következő számokat karikázzák be rendre: $K \to 1$; $M \to 2$; $K \to 3$; $M \to 5$; $K \to 4$; $M \to 7$; $K \to 6$; $M \to 10$; $K \to 8$; $M \to 13$; …

A játék akkor ér véget, ha valamelyik játékos már nem tud a szabályok betartásával újabb számot bekarikázni. Amikor a játék véget ér, hány szám lesz bekarikázva? **7 pont**