Haladók III. kategória 2. (döntő) forduló

1. Tetszőleges n pozitív egész számra jelölje $f(n)$ az olyan $2n$-jegyű számok számát, amelyek megegyeznek az utolsó n számjegyükből alkotott szám négyzetével. Határozzuk meg az f függvény értékkészletét. **7 pont**

2. A különböző sugarú k_1 és k_2 körök az A és B pontokban metszik egymást. A k_1 kör A-beli érintője a C pontban metszi a k_2 kört, míg a k_2 kör A-beli érintője a D pontban metszi a k_1 kört. Az ACD háromszög A csúcsához tartozó belső szögfelezője a k_1 kört az E a k_2 kört az F pontban metszi. Az ACD háromszög A csúcsához tartozó külső szögfelezője a k_1 kört az X a k_2 kört az Y pontban metszi. Igazoljuk, hogy az XY szakasz felező merőlegese érinti a BEF háromszög körülírt körét. **7 pont**

3. Kezdő és Második felírják az $1; 2; 3; \ldots; 609; 610$ számokat egymás után egy papírra, majd a következő pasziánsz-játékot játszák:

- Kezdő a saját i-edik lépése során bekarikázza a legkisebb még be nem karikázott számot, majd
- Második a saját i-edik lépése során bekarikázza a Kezdő által utoljára bekarikázott számnál i-vel nagyobb számot.

  A játék elején a következő számokat karikázzák be rendre: $K \to 1$; $M \to 2$; $K \to 3$; $M \to 5$; $K \to 4$; $M \to 7$; $K \to 6$; $M \to 10$; $K \to 8$; $M \to 13$; $\ldots$

A játék akkor ér véget, ha valamelyik játékos már nem tud a szabályok betartásával újabb számot bekarikázni. Amikor a játék véget ér, hány szám lesz bekarikázva? **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Tetszőleges n pozitív egész számra jelölje $f(n)$ az olyan $2n$-jegyű számok számát, amelyek megegyeznek az utolsó n számjegyükből alkotott szám négyzetével. Határozzuk meg az f függvény értékkészletét. **7 pont**

1. megoldás. Bebizonyítjuk, hogy az f függvény értékkészlete kétféle számot tartalmaz, az 1-et és a 2-t. $n = 1$ esetén két ilyen szám van, a 25 és a 36, $n = 2$ esetén pedig egy ilyen szám van, az 5776. 1 pont

Legyen n rögzített pozitív egész szám. Jelölje A egy, a feladat feltételeit kielégítő szám utolsó n számjegyéből alkotott számot. Ekkor a feladat feltételei alapján $A^2 - A = A(A-1)$ osztható 10^n-nel. Mivel A és $A-1$ relatív prím egymáshoz, és a 10^n prímtényezős felbontása $2^n \cdot 5^n$, ezért négyféle eset lehetséges:

1. eset: $10^n \mid A$ Mivel A legfeljebb n jegyű pozitív egész szám, ezért ez az eset nem lehetséges.

2. eset: $10^n \mid A-1$. Az előzőekhez hasonlóan itt csak $A = 1$ jön szóba, ez szintén nem ad megoldást.

3. eset: $2^n \mid A$, $5^n \mid A-1$. Megmutatjuk, hogy pontosan egy olyan pozitív legfeljebb n-jegyű A szám van, amely teljesíti ezt a feltételt. Vegyük a $2^n, 2\cdot 2^n, \ldots, 5^n \cdot 2^n$ számokat. Mivel a 2^n és az 5^n relatív prímek egymáshoz, ezért ezek teljes maradékrendszert alkotnak mod 5^n. Ez azt jelenti, hogy pontosan egy van köztük, amely 5^n-nel osztva 1 maradékot ad. Ez az egyetlen szóbajövő érték A-ra, mert A többszöröse 2^n-nek, és $2^n \cdot 5^n$ már $n+1$ jegyű. Azt kell még látni, hogy a felsorolt többszörösök között az utolsó kivételével az összes legfeljebb n jegyű pozitív egész szám, de az utolsó osztható 5^n-nel, így nem az lesz az A. Ezzel az esettel is készen vagyunk. 2 pont

4. eset: $5^n \mid A$, $2^n \mid A-1$. Ez az eset visszavezethető az előzőre. Legyen $B = 10^n - (A-1)$. Ekkor B-re teljesül, hogy $2^n \mid B$, $5^n \mid B-1$, továbbá $2 \leqslant B \leqslant 10^n$. Az előző eset alapján kijön, hogy pontosan egy ilyen B szám létezik. Ez éppen az előző esetben kapott szám, mert különben $A = 1$ lenne, amire nem teljesül $5^n \mid A$. 2 pont

Kijött tehát, hogy rögzített n pozitív egészre legfeljebb két olyan legfeljebb n-jegyű pozitív egész A szám van, hogy $10^n \mid A^2 - A$. A^2 akkor fogja kielégíteni a feladat feltételeit, ha $2n$-jegyű. Azt kell még megmutatnunk, hogy a 3. és a 4. esetben kapott két megoldás legalább egyikére teljesül, hogy A^2 $2n$-jegyű szám.

A 4. esetben leírtak alapján a 3. és a 4. esetben kapott két számra, A_1-re és A_2-re teljesül, hogy $A_1 + A_2 = 10^n + 1$. Így a két szám közül az egyik több, mint $\frac{10^n}{2}$. Ennek a négyzete legalább $\frac{10^{2n}}{4} = 25 \cdot 10^{2n-2}$, amely egy $2n$-jegyű szám. Viszont $2n$-nél több jegyből nem állhat egy n-jegyű szám négyzete (hiszen kisebb, mint 10^{2n}), így a feladat megoldását befejeztük. (Az itt leírtakból látszik, hogy miért csak egy megoldás van $n = 2$: a két szóbajövő megoldás a 25 és a 76, de a 25 négyzete csak háromjegyű.) 2 pont

Összesen: 7 pont

2. megoldás. (vázlat) Azt mutatjuk meg, hogy pontosan két olyan $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot 10^k$ alakú A szám van, hogy $A^2 = A$.

$n = 1$-re két ilyen szám van, az 5 és a 6.

Akár az 5, akár a 6-ból indulunk ki, ha megvan már a 10-adikus számunk első pár jegye pl. (visszafelé és az 5-ből indulva) $A = 52609\ldots$ (most $a = 90625$-tel jelölöm A kezdőszeletének tényleges értékét), az azt jelenti, hogy $a^2 = a + c \cdot 10^5 \pmod{10^{5+1}}$ is igaz valamely egyértelműen meghatározott $0 \leqslant c \leqslant 9$ számjegyre.

Innen, ha tovább akarunk lépni és megkeresni A újabb, mondjuk b-vel jelölt számjegyét, ($A = 52609b\ldots$), akkor a

$$(10^5 \cdot b + a)^2 = (10^5 \cdot b + a) \pmod{10^{5+1}}$$

egyenletet kell megoldanunk, ahol b számjegy.

Adódik:

$$10^{10} \cdot b^2 + 2 \cdot 10^5 \cdot b \cdot a + a^2 = (2 \cdot 10^5 \cdot b \cdot a + a + c \cdot 10^5) = (10^5 \cdot b + a) \pmod{10^{5+1}}$$

egyenletet jelenti, innen adódik (10^5-nel egyszerűsítve), hogy $b \cdot (2a - 1) + c = 0 \pmod{10}$ a megoldandó (a ismert és vége 5, c ismert) $\to$ $c - b = 0 \pmod{10}$ a megoldandó, azaz $b = c$ automatikusan.

Innen minden állításunk azonnal következik, és egyszerűen generálhatóak a további jegyek: az 5-ből induló sorozatnál a meglévő számot négyzetre kell emelni, és venni a hátulról számított $n + 1$-edik jegyet, a 6-ból induló sorozatnál pedig a kapott jegyet ki kell egészíteni 10-re.

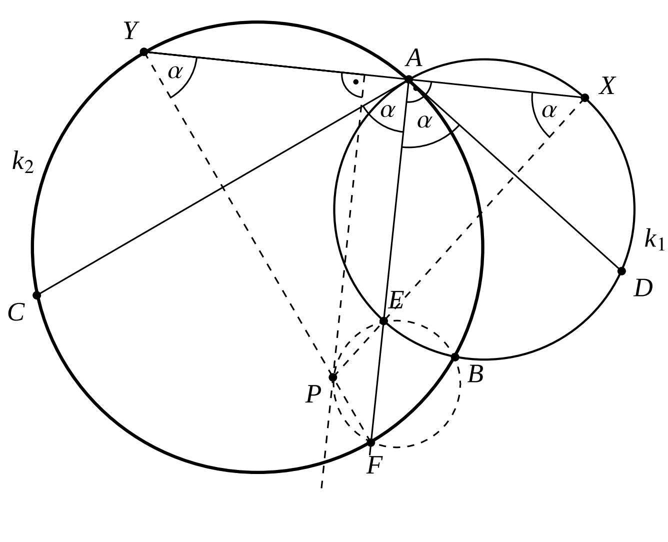
Az 5-tel kezdődő sorozat néhány jegye: $A = 5260982128199526652293\ldots$

A 6-tal kezdődő sorozat néhány jegye: $B = 6739017871800473347706\ldots$

Összesen: **7 pont**

2. A különböző sugarú k_1 és k_2 körök az A és B pontokban metszik egymást. A k_1 kör A-beli érintője a C pontban metszi a k_2 kört, míg a k_2 kör A-beli érintője a D pontban metszi a k_1 kört. Az ACD háromszög A csúcsához tartozó belső szögfelezője a k_1 kört az E a k_2 kört az F pontban metszi. Az ACD háromszög A csúcsához tartozó külső szögfelezője a k_1 kört az X a k_2 kört az Y pontban metszi. Igazoljuk, hogy az XY szakasz felező merőlegese érinti a BEF háromszög körülírt körét. **7 pont**

Megoldás.



Az általánosság megszorítása nélkül feltehető, hogy a k_1 kör sugara a kisebb. Jelölje α a CAD háromszög A-nál lévő szögének felét. Az érintő szárú kerületi szögek tétele alapján

$AXE\sphericalangle = CAE\sphericalangle = \alpha$ és $AYF\sphericalangle = DAF\sphericalangle = \alpha$. Mivel a kisebb körben ugyanakkora kerületi szöghöz (α) rövidebb húr tartozik, így a C, E és F pontok sorrendje valóban az ábrának megfelelő. Jelölje k a BEF háromszög körülírt körét.

Legyen az YF szakasz és az XE egyenes E-n túli meghosszabbításának metszéspontja P. Az előző szakaszban leírtak alapján a PXY háromszög XY oldalán fekvő mindkét szög nagysága α, így ez a háromszög egyenlőszárú, tehát $PX = PY$. 2 pont

Most azt mutatjuk meg, hogy a P pont rajta van k-n. Ehhez kiszámoljuk az $EBF\sphericalangle$ és az $EPF\sphericalangle$ szögeket. Az utóbbi egyszerű: ez az XYP háromszög külső szöge, tehát egyenlő $\alpha + \alpha = 2\alpha$-val.

$EBF\sphericalangle = ABF\sphericalangle - ABE\sphericalangle = (180^\circ - \alpha - \alpha = 108^\circ - 2\alpha)$, ahol a számolás során a k_2 körben húrnégyszögek tételét és a k_1 körben pedig a kerületi szögek tételét alkalmaztuk.

Látható, hogy $EBF\sphericalangle + EPF\sphericalangle = 180^\circ$, így a húrnégyszögek tételének megfordítása alapján P, B, E és F egy körön van. 3 pont

Mivel a P pont rajta van az XY szakasz felezőmerőlegesén, azt kéne még megmutatni, hogy a felezőmerőleges érinti P-ben a k kört. Mivel a felezőmerőleges és AF párhuzamos (mindkettő merőleges XY-ra), ezért azt kell csak megmutatni, hogy P felezi a k körön a megfelelő EF ívet, azaz $PE = PF$, vagyis EFP egyenlőszárú háromszög. Ez pedig egyszerű szögszámolással kijön (kihasználva, hogy YFA és XEA derékszögű háromszögek): $PFE\sphericalangle = YFA\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$ és $PEF\sphericalangle = XEA\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$. Ezzel a bizonyítást befejeztük. 2 pont

Összesen: **7 pont**

3. Kezdő és Második felírják az $1; 2; 3; \ldots; 609; 610$ számokat egymás után egy papírra, majd a következő pasziánsz-játékot játszák:

- Kezdő a saját i-edik lépése során bekarikázza a legkisebb még be nem karikázott számot, majd
- Második a saját i-edik lépése során bekarikázza a Kezdő által utoljára bekarikázott számnál i-vel nagyobb számot.

  A játék elején a következő számokat karikázzák be rendre: $K \to 1$; $M \to 2$; $K \to 3$; $M \to 5$; $K \to 4$; $M \to 7$; $K \to 6$; $M \to 10$; $K \to 8$; $M \to 13$; ...

A játék akkor ér véget, ha valamelyik játékos már nem tud a szabályok betartásával újabb számot bekarikázni. Amikor a játék véget ér, hány szám lesz bekarikázva? **7 pont**

Megoldás.

Jelöljük a_i-vel a Kezdő, míg b_i-vel a Második által az i-edik lépésben bekarikázott számot. A feladat alapján $b_i = a_i + i$. Nyilván mindkét sorozat szigorúan monoton nő. Mivel $a_i + 1 \leqslant a_{i+1} \to \quad b_{i+1} = a_{i+1} + i + 1 \geqslant a_i + i + 2 = b_i + 2$, azaz Második két lépése között legalább 2 a különbség. Innen adódik, hogy amikor Kezdő jön, akkor az a_i-t követő, vele szomszédos számok között legfeljebb a legelsőt jelölhette már meg Második, azaz $a_{i+1} \leqslant a_i + 2$. Összefoglalva: $a_i + 1 \leqslant a_{i+1} \leqslant a_i + 2$

Ez a gondolat valamilyen formában. 1 pont

Most írjuk fel Kezdő és Második első pár lépését, és tegyünk megfigyeléseket (ezeket majd bizonyítjuk is)!

i:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Kezdő lépése	$\boxed{1}$	$\boxed{3}$	4	6	$\boxed{8}$	9	11	12	14	16	17	19	$\boxed{21}$
Második lépése	$\boxed{2}$	$\boxed{5}$	7	10	$\boxed{13}$	15	18	20	23	26	28	31	$\boxed{34}$

A következők figyelhetőek meg: $a_{f_{2k-1}} = f_{2k}$ és $a_{f_{2k-1}} = f_{2k}$, valamint $a_{f_{2k}} = f_{2k+1} - 1$ és $b_{f_{2k}} = f_{2k+2} - 1$, ahol f_k a k-adik Fibonacci-szám. ($f_1 = f_2 = 1$; $f_3 = 2$; $f_4 = 3$; $f_5 = 5\ldots$)

A képletek $a_{f_{2k-1}}, b_{f_{2k-1}}$-re, illetve $a_{f_{2k}}, b_{f_{2k}}$-ra. 1+1 pont

A fenti állításokat (egyszerre, mivel külön-külön nehézkesen menne!) teljes indukcióval bizonyítjuk.

I. (Bázis) Mint látható az első pár k-ra igaz az állítás.

II. (Indukciós feltevés) Tegyük fel, hogy valamely k-ig $a_{f_{2k-1}} = f_{2k}$ és $a_{f_{2k-1}} = f_{2k}$, valamint $a_{f_{2k}} = f_{2k+1} - 1$ és $b_{f_{2k}} = f_{2k+2} - 1$ is teljesül.

III. (Indukciós lépés) Igaz-e, hogy ekkor $a_{f_{2k+1}} = f_{2k+2}$ és $b_{f_{2k+1}} = f_{2k+3}$, valamint $a_{f_{2k+2}} = f_{2k+3} - 1$ és $b_{f_{2k+2}} = f_{2k+4} - 1$ is teljesül?

Mivel az indukciós feltevés miatt $b_{f_{2k}} = f_{2k+2} - 1$, ezért amikor Második a saját f_{2k}-adik számát bekarikázza, akkor az ettől nem nagyobb számok közül pontosan $2f_{2k}$ van bekarikázva, azaz a nem bekarikázott számok száma (felhasználva $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$-t):

$$f_{2k+2} - 1 - 2f_{2k} = (f_{2k+2} - f_{2k}) - f_{2k} - 1 = f_{2k+1} - f_{2k} - 1 = f_{2k-1} - 1$$

Ezeket a nem bekarikázott számokat pontosan újabb $f_{2k-1} - 1$ lépés során rendre Kezdő fogja bekarikázni.

Másfelől mivel $b_{i+1} - b_i \geqslant 2$, ezért az $f_{2k+2} = b_{f_{2k}} + 1$ számot Második nem karikázhatja be, de akkor Kezdő újabb egy lépés (összesen f_{2k-1} lépés) után pontosan ezt a számot karikázza be, azaz $a_{f_{2k}+f_{2k-1}} = a_{f_{2k+1}} = f_{2k+2}$ és innen b_n képzési szabálya szerint $b_{f_{2k+1}} = f_{2k+2} + f_{2k+1} = f_{2k+3}$ (ahogy a bizonyítandó első pár állítja).

Tovább vizsgálódva (teljesen hasonlóan, mint az előbb) adódik, hogy amikor Második a saját f_{2k+1}-edik számát bekarikázza, akkor az ettől nem nagyobb számok közül pontosan $2f_{2k+1}$ van bekarikázva, azaz a nem bekarikázott számok száma:

$$f_{2k+3} - 2f_{2k+1} = (f_{2k+3} - f_{2k+1}) - f_{2k+1} = f_{2k+2} - f_{2k+1} = f_{2k}.$$

Ezeket a nem bekarikázott számokat pontosan újabb f_{2k} lépés során rendre Kezdő fogja bekarikázni.

Másfelől mivel $f_{2k+3} = b_{f_{2k+1}}$ számot Második már bekarikázta, a tőle eggyel kisebb ($f_{2k+3} - 1$) szám a legnagyobb még be nem karikázott szám f_{2k+3}-ig, azaz Kezdő az újabb f_{2k} lépése után pontosan ezt a számot karikázza be, azaz $a_{f_{2k+1} f_{2k}} = a_{f_{2k+2}} = f_{2k+3} - 1$ és innen b_n képzési szabálya szerint $b_{f_{2k+2}} = f_{2k+3} - 1 + f_{2k+2} = f_{2k+4} - 1$ (ahogy a bizonyítandó második pár állítja).

Ezzel a teljes indukciós bizonyítási séma helyessége miatt az állításunkat beláttuk.

A teljes indukciós bizonyításért. 3 pont

Mivel $233 = f_{13}$; $377 = f_{14}$; $610 = f_{15}$, ezért $b_{233} = 610$, azaz (mivel Kezdőnek van még egy lépése) Kezdő 233 + 1, Második 233 számot, vagyis ketten összesen $2f_{13} + 1 = 467$ számot karikáznak be.

A helyes válaszért. 1 pont

Összesen: **7 pont**