

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2019/2020-as tanév

1. forduló

Haladók II. kategória

Feladatok

1. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$4x^2 + \frac{1}{x^2} - 3 = 4x - \frac{2}{x} \quad 7 \text{ pont}$$

2. Dobjunk 5-ször egy szabályos hatoldalú kockával. Dobásainkat írjuk egymás mellé és alkossunk így 5-jegyű számokat. Tekintsük az összes így létrehozható számot.

Melyikből van több és miért: azokból a számokból, amelyekben van legalább két azonos számjegy, vagy azokból, amelyekben nincs két szomszédos 6-os számjegy? 7 pont

3. Mutassuk meg, hogy bármely olyan $ABCDEF$ hatszögre, amelynek minden szöge egyenlő, igaz, hogy $AB - DE = EF - BC = CD - FA$. (AB, BC, CD, DE, EF és FA a hatszög oldalainak hosszát jelölik.) 7 pont

4. Legyenek a_n és b_n a következő rekurziókkal megadott sorozatok: $a_1 = 1$; $a_{n+1} = 10 \cdot a_n + 1$ ($n \geq 1$) és $b_1 = 1$; $b_{n+1} = 10 \cdot (b_n + 1)$ ($n \geq 1$), továbbá legyen $c_n = b_n - a_n$. Kiszámolva az $s_{2019} = c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_{2019}$ összeget; s_{2019} -ben mennyi a számjegyek összege? 7 pont

5. Adott két halmaz: $A = \{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19\}$ és $B = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20\}$. Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amely mind az A , mind a B halmaz elemei közül pontosan öthöz relatív prím! (Két pozitív egész szám relatív prím, ha legnagyobb közös osztójuk 1.) 7 pont