Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2019/2020-as tanév

1. forduló

Haladók II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$4x^2 + \frac{1}{x^2} - 3 = 4x - \frac{2}{x}$$ **7 pont**

Megoldás. Felhasználva, hogy:

$$\left(2x - \frac{1}{x}\right)^2 = 4x^2 + \frac{1}{x^2} - 4$$ 1 pont

Az egyenlet az alábbi alakba írható:

$$\left(2x - \frac{1}{x}\right)^2 + 1 = 2\left(2x - \frac{1}{x}\right)$$

$$\left(2x - \frac{1}{x}\right)^2 - 2\left(2x - \frac{1}{x}\right) + 1 = 0$$ 2 pont

Ebből:

$$\left(2x - \frac{1}{x} - 1\right)^2 = 0$$

$$2x - \frac{1}{x} = 1$$ 1 pont

Az egyenletet átalakítva:

$$2x^2 - x - 1 = 0$$

amiből:

$$x_1 = -\frac{1}{2}; \qquad x_2 = 1$$ 2 pont

A kapott gyökök kielégítik az eredeti egyenletet. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Dobjunk 5-ször egy szabályos hatoldalú kockával. Dobásainkat írjuk egymás mellé és alkossunk így 5-jegyű számokat. Tekintsük az összes így létrehozható számot.

Melyikből van több és miért: azokból a számokból, amelyekben van legalább két azonos számjegy, vagy azokból, amelyekben nincs két szomszédos 6-os számjegy? **7 pont**

1. megoldás.

Összesen $6^5 = 7776$ különböző szám hozható létre, ezek között $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ olyan szám van, melyben nincs ismétlődés. Így $7776 - 720 = 7056$ olyan szám van, amelyben van ismétlődő számjegy. 2 pont

Ha azokat a számokat keressük, amelyekben nincs két szomszédos 6-os, akkor aszerint tekintsünk két esetet, hogy a középső számjegy 6-os vagy sem: 1 pont

Ha a középső számjegy 6-os, akkor a 2. és a 4. számjegy 5-5-féle lehet (6-os nem), míg az 1. és az 5. számjegy mind a hatféle számjegy lehet. Ez $6 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 6 = 900$ darab szám. 1 pont

Ha a középső számjegy nem 6-os, akkor 5-féle lehet. Az első két számjegy mindegyike 6-os nem lehet, ez $6^2 - 1 = 35$ szám, hasonlóan az utolsó két számjegy is 35-féle lehet.

Ez $35 \cdot 5 \cdot 35 = 6125$ darab szám. 1 pont

Így olyan szám, amelyben nincs két szomszédos 6-os: $900 + 6125 = 7025$ darab van. 1 pont

Tehát azokból a számokból van több, amelyekben van ismétlődő számjegy. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. Összesen $6^5 = 7776$ különböző szám hozható létre, ezek között $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ olyan szám van, amelyben nincs ismétlődés. Így $7776 - 720 = 7056$ olyan szám van, amelyben van ismétlődő számjegy. 2 pont

Ha azokat a számokat keressük, amelyekben nincs két szomszédos 6-os, akkor aszerint tekintsünk négy esetet aszerint, hogy hány darab 6-os számjegy van a számban. Ha 4 vagy 5 db 6-os lenne, akkor biztosan lenne 2 szomszédos 6-os, így 0, 1, 2 vagy 3 darab 6-os lehet a számban. 1 pont

Azokból a számokból, amelyekben 0 darab 6-os számjegy van $5^5 = 3125$ darab van. Ha 1 darab 6-os van a számban, az 5 helyre kerülhet, így ezekből a számokból is $5 \cdot 5^4 = 3125$ darab van. 1 pont

Ha 2 darab 6-os van a számban, azokat 6-féleképpen helyezhetjük el, úgy, hogy ne legyenek szomszédosok. (1.3., 1.4., 1.5., 2.4., 2.5., 3.5.) A fennmaradó 3 helyre 5-5 számjegy kerülhet, ez így $6 \cdot 5^3 = 750$ szám.

Három darab 6-os úgy, hogy ne legyen köztük szomszédos, csak egyféleképpen helyezhető el, az 1., a 3. és az 5. helyre. A 2. és a 4. helyre 5-5 féle számjegy kerülhet. Ez $1 \cdot 5^2 = 25$ szám. 1 pont

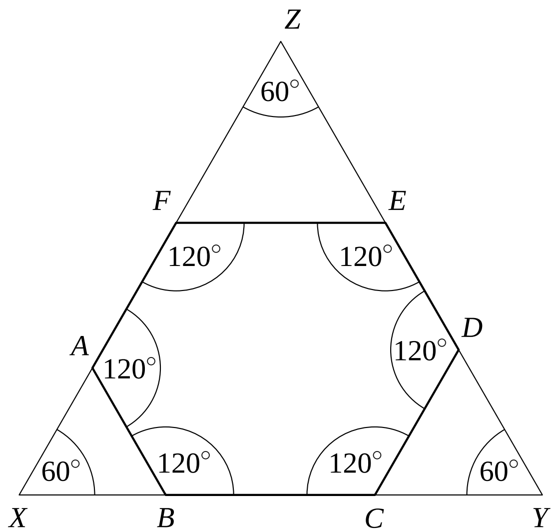
Így olyan szám, amelyben nincs két szomszédos 6-os: $3125 + 3125 + 750 + 25 = 7025$ darab van. 1 pont

Tehát azokból a számokból van több, amelyekben van ismétlődő számjegy. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Mutassuk meg, hogy bármely olyan $ABCDEF$ hatszögre, amelynek minden szöge egyenlő, igaz, hogy $AB - DE = EF - BC = CD - FA$. ($AB$, BC, CD, DE, EF és FA a hatszög oldalainak hosszát jelölik.) **7 pont**

Megoldás. Egy hatszög belső szögeinek összege: $4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$. Mivel a feladat szerinti hatszög minden szöge egyenlő, ezért minden belső szög $\frac{720^\circ}{6} = 120^\circ$. 1 pont



Ezért a hatszög külső szögei mind 60° nagyságúak. 1 pont

Hosszabbítsuk meg az AF, BC és DE oldalakat, messék ezek egymást páronként az ábra szerint az X, Y, Z pontokban. 1 pont

Az XAB, YCD, ZEF háromszögek szabályosak, de így az XYZ háromszög mindhárom szöge is 60°, vagyis ez a háromszög is szabályos. 1 pont

Ennek a háromszögnek az oldalaira:

$$XY = XB + BC + CY = AB + BC + CD,$$
$$YZ = YD + DE + EZ = CD + DE + EF,$$
$$ZX = ZF + FA + AX = EF + FA + AB.$$

1 pont

Mivel az XYZ háromszög oldalai egyenlő hosszúak, ezért $AB + BC + CD = CD + DE + EF$, rendezve: $AB - DE = EF - BC$ 1 pont

ugyanígy az $YZ = ZX$ egyenlőségből $CD - FA = AB - DE$ 1 pont

Megjegyzés. Ha valaki csak szabályos hatszöget vizsgál, legfeljebb 2 pontot kaphat.

Összesen: **7 pont**

4. Legyenek a_n és b_n a következő rekurziókkal megadott sorozatok: $a_1 = 1$; $a_{n+1} = 10 \cdot a_n + 1$ $(n \geq 1)$ és $b_1 = 1$; $b_{n+1} = 10 \cdot (b_n + 1)$ $(n \geq 1)$, továbbá legyen $c_n = b_n - a_n$. Kiszámolva az $s_{2019} = c_1 + c_2 + c_3 + \ldots + c_{2019}$ összeget; s_{2019}-ben mennyi a számjegyek összege? **7 pont**

1. megoldás. $a_1 = 1$; $a_2 = 11$; $a_3 = 111, \ldots$ a sorozat képzési szabályából következően az előző elem után mindig egy újabb 1-es számjegyet írunk, így $a_n = \underbrace{111\ldots11}_{n \text{ db 1-es}}$. 1 pont

Ekkor

$$a_n = \frac{10^n - 1}{9} \qquad \text{1 pont}$$

$b_1 = 1$; $b_2 = 20$; $b_3 = 210$; $b_4 = 2110$; $b_5 = 21110, \ldots$ a sorozat képzési szabályából következően az előző elem 1-es számjegyei után mindig egy újabb 1-es számjegyet írunk, így

$$b_n = 2\underbrace{111\ldots11}_{n-2 \text{ db 1-es}}0. \qquad \text{1 pont}$$

Tehát

$$b_n = 2 \cdot 10^{n-1} + \frac{10^{n-1} - 1}{9} - 1$$

$$b_n - a_n = 2 \cdot 10^{n-1} + \frac{1}{9} \cdot 10^{n-1} - \frac{1}{9} - 1 - \left(\frac{10}{9} \cdot 10^{n-1} - \frac{1}{9}\right) = 10^{n-1} - 1 = \underbrace{999\ldots99}_{n-1 \text{ db 9-es}}. \qquad \text{1 pont}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} s_{2019} &= (1-1) + (10-1) + (10^2 - 1) + \ldots + (10^{2018} - 1) = \\ &= \underbrace{111\ldots11}_{2019 \text{ db 1-es}} - 2019 = \underbrace{111\ldots11}_{2014 \text{ db 1-es}}09092. \end{aligned} \qquad \text{2 pont}$$

Tehát s_{2019} számjegyeinek összege: $2014 \cdot 1 + 9 + 9 + 2 = 2034$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás. n_c sorozat definíciója alapján

$$c_{n+1} = b_{n+1} - a_{n+1} = 10(b_n + 1) - 10(a_n + 1) = 10(a_n - b_n) + 9, \text{ ahol } c_1 = 9. \qquad \text{1 pont}$$

A kapott képzési szabály szerint

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= 10 \cdot (a_n - b_n) + 9 = 10 \cdot (10 \cdot (a_{n-1} - b_{n-1}) + 9) + 9 = \ldots \\ &= 10 \cdot (10 \cdot (10 \cdot (\ldots \cdot (a_1 - b_1) \ldots))) + 9 = \underbrace{999\ldots99}_{n-1 \text{ db}}. \end{aligned} \qquad \text{3 pont}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} s_{2019} &= \underbrace{999\ldots99}_{n-1 \text{ db}} + \underbrace{999\ldots99}_{n-2 \text{ db}} + \cdots + 999 + 99 + 9 = \\ &= (10^{2018} - 1) + (10^{2017} - 1) + \cdots + (10^2 - 1) + (10 - 1) + (1 - 1) = \\ &= \underbrace{111\ldots11}_{2019 \text{ db}} - 2019 = \underbrace{111\ldots11}_{2014 \text{ db}}09092. \end{aligned} \qquad \text{2 pont}$$

s_{2019} számjegyeinek összege $2014 \cdot 1 + 9 + 9 + 2 = 2034$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

5. Adott két halmaz: $A = \{1;3;5;7;9;11;13;15;17;19\}$ és $B = \{2;4;6;8;10;12;14;16;18;20\}$. Határozzuk meg azt a legkisebb pozitív egész számot, amely mind az A, mind a B halmaz elemei közül pontosan öthöz relatív prím! (Két pozitív egész szám relatív prím, ha legnagyobb közös osztójuk 1.) **7 pont**

Megoldás. A keresett n szám nem lehet páros, mert akkor a B halmaz egyetlen eleméhez sem lenne relatív prím. 1 pont

$$A = \{1;3;5;7;3^2;11;13;3\cdot 5;17;19\} \quad \text{és} \quad B = \{2;2^2;2\cdot 3;2^3;2\cdot 5;2^2\cdot 3;2\cdot 7;2^4;2\cdot 3^2;2^2\cdot 5\}$$

Mivel a keresett n szám páratlan, a B halmaz négy eleméhez (2-höz, 4-hez, 8-hoz és 16-hoz) biztosan relatív prím. Így a többi hat elem $2\cdot 3$; $2\cdot 5$; $2^2\cdot 3$; $2\cdot 7$; $2\cdot 3^2$; $2^2\cdot 5$ közül még pontosan egyhez kell relatív prímnek lennie. 1 pont

Az n szám páratlan, ezért prímtényezős felbontásában nem szerepel a 2. Ha a 3 sem szerepelne benne, akkor az n szám a 6-hoz, 12-höz és 18-hoz is relatív prím lenne, így a B halmaz elemei közül már legalább héthez lenne relatív prím. 1 pont

Ha az n prímtényezős felbontásában nem szerepelne az 5, akkor n relatív prím lenne a 10-hez és a 20-hoz, így már legalább hat B-beli elemhez lenne relatív prím. 1 pont

Tehát n prímtényezős felbontásában van 3 és van 5. Ellenben a 7 nem szerepelhet az n prímtényezős felbontásában, hiszen akkor a $6 = 2\cdot 3$; $10 = 2\cdot 5$; $12 = 2^2\cdot 3$; $14 = 2\cdot 7$; $18 = 2\cdot 3^2$; $20 = 2^2\cdot 5$ számok közül egyhez sem lenne relatív prím, pedig az egyikhez relatív prímnek kell lennie.

Tehát $n = 3\cdot 5$ vagy $n = 3\cdot 5\cdot p\cdot q\cdot\ldots$, ahol a $p, q, \ldots$ prímek mindegyike 7-nél nagyobb. 1 pont

A $15 = 3\cdot 5$ az A halmaz elemei közül relatív prím az 1-hez, 7-hez, 11-hez, 13-hoz, 17-hez és 19-hez. Ez így hat szám, ezért az egyik relatív prím relációt meg kell szüntetni, tehát az n prímtényezős felbontásában az iménti felsorolásban szereplő öt prímszám közül pontosan egynek szerepelni kell. 1 pont

Korábban láttuk, hogy ez nem lehet a 7. Mivel az n szám a lehető legkisebb kell legyen, ezért n prímtényezős felbontásában a 3 és az 5 mellett a 11-nek kell szerepelni. Tehát $n = 165$ 1 pont

Összesen: **7 pont**