Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2019/2020-as tanév
Haladók II. kategória, 2. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Igazoljuk, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}^+$ szám esetén az $\dfrac{n^4+4n^2+3}{n^4+6n^2+8}$ tört nem egyszerűsíthető. **7 pont**

Megoldás.

$$\frac{n^4+4n^2+3}{n^4+6n^2+8}=\frac{\left(n^2+1\right)\left(n^2+3\right)}{\left(n^2+2\right)\left(n^2+4\right)}$$ 1 pont

A számlálóban és a nevezőben szereplő négy zárójeles kifejezés négy egymást követő pozitív egész számot jelöl. Mivel két szomszédos pozitív egész szám legnagyobb közös osztója 1, ezért a tört csak abban az esetben egyszerűsíthető, ha az egyszerűsítés az n^2+1 és n^2+4 számokat érinti. 1 pont

$d \mid n^2+4$ és $d \mid n^2+1$ esetén $d \mid \left(n^2+4\right)-\left(n^2+1\right)=3$ alapján a tört pontosan akkor egyszerűsíthető, ha $d=3$. 2 pont

A két kifejezés 3-mal való osztási maradékát vizsgáljuk.

Ha $n=3k\pm 1$ ($k \in \mathbb{N}$), akkor

$$n^2+1=9k^2\pm 6k+2=3\left(3k^2\pm 2k\right)+2 \quad \text{és} \quad n^2+4=3\left(3k^2\pm 2k+1\right)+2$$

alapján mindkét kifejezés 3-mal osztva 2 maradékot ad. 1 pont

Ha $n=3k$ ($k \in \mathbb{N}$), akkor

$$n^2+1=9k^2+1=3\cdot 3k^2+1 \quad \text{és} \quad n^2+4=9k^2+4=3\left(3k^2+1\right)+1$$

alapján mindkét kifejezés 3-mal osztva 1 maradékot ad. 1 pont

Így $\left(n^2+1;n^2+4\right)=1$, tehát a tört 3-mal sem egyszerűsíthető. Ezzel az állítást beláttuk. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Határozzuk meg a következő függvény szélsőértékeit az $[1;6]$ intervallumon:

$$f: x \mapsto \frac{4x^2+100}{x}$$ **7 pont**

Megoldás.

$$f(x) = 4x + \frac{100}{x}$$

Mivel az összeg mindkét tagja pozitív az $[1;6]$ intervallumon, ezért alkalmazhatjuk a számtani–mértani közepek közti egyenlőtlenséget:

$$4x + \frac{100}{x} \geq 2 \cdot \sqrt{4x \cdot \frac{100}{x}} = 40.$$ 1 pont

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha a két tag egyenlő, azaz

$$4x = \frac{100}{x}.$$

Ami a feltételt figyelembe véve $x = 5$ esetben teljesül. 1 pont

Ez egyszersmind azt is jelenti, hogy a függvény az $[1;6]$ intervallumon az 5-ben veszi fel a minimumát, amely 40-nel egyenlő. 1 pont

Megmutatjuk, hogy a függvény az $[1;5[$ intervallumon szigorúan monoton csökken, vagyis $1 \leq x_1 < x_2 < 5$ esetén a

$$\frac{4x_1^2+100}{x_1} > \frac{4x_2^2+100}{x_2} \Leftrightarrow 4(x_1-x_2) > 100 \cdot \left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) = 100 \cdot \frac{x_1-x_2}{x_1x_2}$$

$$(x_1-x_2) > (x_1-x_2) \cdot \frac{25}{x_1x_2}$$

összefüggés teljesül.
Mivel ha $1 \leq x_1 < x_2 < 5$, akkor $x_1 \cdot x_2 > 0$ (és $x_1 - x_2 < 0$), így valóban fennáll ez utóbbi egyenlőtlenség. 1 pont

Most pedig megmutatjuk, hogy a függvény az $]5;6]$ intervallumon szigorúan monoton növekvő, vagyis $5 < x_1 < x_2 \leq 6$ esetén a

$$\frac{4x_1^2+100}{x_1} < \frac{4x_2^2+100}{x_2} \Leftrightarrow (x_1-x_2) < (x_1-x_2) \cdot \frac{25}{x_1x_2}$$

összefüggés teljesül.
Mivel ha $5 < x_1 < x_2 \leq 6$, akkor $x_1x_2 > 25$ (és $x_1 - x_2 < 0$), így valóban fennáll ez utóbbi egyenlőtlenség. 1 pont

Mivel f az $[1;5[$ intervallumban szigorúan monoton növekedő, az $]5;6]$ intervallumban szigorúan monoton csökkenő, a maximumát kizárólag az $[1;6]$ intervallum végpontjaiban veheti fel. 1 pont

A két intervallumhatáron felvett, $f(1) = 104$ és $f(6) = \dfrac{244}{6} = 40\dfrac{2}{3}$ értékek közül $f(1)$ a nagyobb, így ez lesz a függvény maximumértéke is. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Adjuk meg az összes olyan legalább kételemű halmazt, amelynek elemei egész számok, és a halmaz elemeinek szorzata éppen annyi, mint ahány részhalmaza van a halmaznak! **7 pont**

Megoldás. A halmaz elemeinek száma legyen n, ekkor részhalmazainak száma 2^n. Ha egész számok szorzata a 2-nek hatványa, akkor e szorzat bármely tényezője 2 valamely hatványa vagy annak ellentettje. 1 pont

Először belátjuk, hogy a halmaz elemeinek száma legfeljebb 6.

Tegyük fel, hogy $n \geq 7$, azaz $n = 6 + k$, ahol $k \geq 1$. A halmaz elemei legyenek x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, ..., x_n.

A feltétel szerint $x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \cdot \ldots \cdot x_n = 2^n = 2^{6+k} = 2^6 \cdot 2^k$.

Feltehetjük, hogy $|x_1| \leq |x_2| \leq |x_3| \leq |x_4| \leq |x_5| \leq |x_6| \leq |x_7| \leq \ldots \leq |x_n|$.

Ekkor $|x_1| \geq 1$; $|x_2| \geq 1$; $|x_3| \geq 2$; $|x_4| \geq 2$; $|x_5| \geq 4$; $|x_6| \geq 4$; $|x_7| \geq 8$, és nyilván $|x_i|$ legalább 8, ha $k \geq 8$, ezért

$$2^n = 2^6 \cdot 2^k = |x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 \cdot x_7 \cdot \ldots \cdot x_n| =$$
$$= |x_1| \cdot |x_2| \cdot |x_3| \cdot |x_4| \cdot |x_5| \cdot |x_6| \cdot |x_7| \cdot \ldots \cdot |x_n| \geq 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 8 = 2^6 \cdot 8^k.$$

Tehát $2^6 \cdot 2^k \geq 2^6 \cdot 8^k$, innen $k = 0$, ami ellentmond a $k \geq 1$ feltételnek. Tehát $n \leq 6$. 2 pont

Ha $n = 6$ lenne, akkor $x_1x_2x_3x_4x_5x_6 = 2^6$, és ebben az esetben

$$64 = 2^6 = |x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6| = |x_1| \cdot |x_2| \cdot |x_3| \cdot |x_4| \cdot |x_5| \cdot |x_6| \geq 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 4 = 64.$$

Az egyenlőség csak úgy teljesülhet, hogy $|x_1| = 1$; $|x_2| = 1$; $|x_3| = 2$; $|x_4| = 2$; $|x_5| = 4$; $|x_6| = 4$, azaz $x_1 = -1$; $x_2 = 1$; $x_3 = -2$; $x_4 = 2$; $x_5 = -4$; $x_6 = 4$, ám ebben az esetben

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot x_6 = -64$$

lenne. 1 pont

Tehát $2 \leq n \leq 5$.

Ha $n = 5$, akkor nyilván $|x_5| \leq 8$. A lehetséges halmazok: $\{-1; 1; -2; 2; 8\}$ és {-1; 1; 2; -4; 4}.

Ha $n = 4$, akkor a halmazok:

$$\{-1; 1; -2; 8\}, \{-1; 1; 2; -8\}, \{-1; 1; -4; 4\}, \{-1; -2; 2; 4\}, \{1; -2; 2; -4\}.$$

Ha $n = 3$, akkor a halmazok: $\{-1; 1; -8\}$, $\{-1; -2; 4\}$, $\{-1; 2; -4\}$, $\{1; -2; -4\}$.

Ha $n = 2$, akkor a halmazok: $\{1; 4\}$, $\{-1; -4\}$. 3 pont

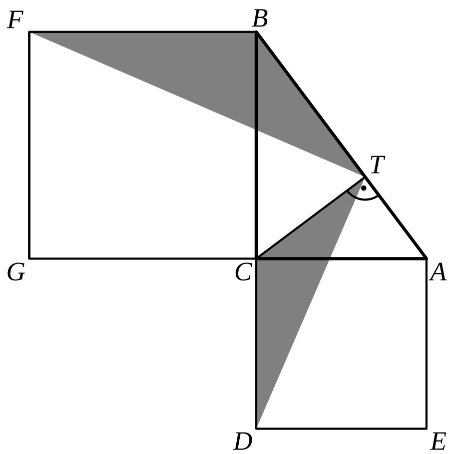
Megjegyzés. Az utolsó három pont akkor jár, ha mind a tizenhárom halmazt megadja.

Két pontot kapjon, ha megtalál legalább kilenc halmazt, egy pontot kapjon, ha megtalál legalább ötöt.

Összesen: **7 pont**

4. Az ABC háromszögben $BCA\sphericalangle = 90^\circ$. A háromszög befogóira kifelé $ACDE$ és $BFGC$ négyzeteket rajzolunk. Bizonyítsuk be, hogy ha a háromszög átfogóhoz tartozó magasságának talppontja T, akkor az FDT háromszög derékszögű. **7 pont**

1. megoldás. $CAT\triangle \sim BCT\triangle$, mivel $ATC\sphericalangle = CTB\sphericalangle = 90^\circ$ és $TCA\sphericalangle = TBC\sphericalangle$ (merőleges szárú hegyesszögek). 1 pont



A hasonlóság alapján:

$$\frac{CA}{CT} = \frac{BC}{BT}, \qquad \text{azaz} \qquad \frac{CD}{CT} = \frac{BF}{BT} \qquad (1)$$ 1 pont

Ezt felhasználva:

$$TCD\sphericalangle = TCA\sphericalangle + 90^\circ = TBC\sphericalangle + 90^\circ = TBF\sphericalangle. \quad (2)$$ 1 pont

Az (1), (2) egyenlőségek figyelembevételével:

$$TCD\triangle \sim TBF\triangle \qquad \text{és} \qquad CDT\sphericalangle = BFT\sphericalangle.$$ 1 pont

Ez utóbbi egyenlőség alapján $BDT\sphericalangle = BFT\sphericalangle$, így az $FDTB$ négyszög húrnégyszög. 1 pont

Ezen húrnégyszög alapján: $DTF\sphericalangle = DBF\sphericalangle = 90^\circ$ (azonos íven nyugvó kerületi szögek).

Ezzel az állítást beláttuk. 1 pont

Összesen: **7 pont**

Megjegyzés. Az utolsó két pontot az alábbi gondolatmenetért is megkaphatja a versenyző:

A hasonlóság és $CTB\sphericalangle = 90^\circ$ miatt TCB és TBF háromszögek 90°-os elforgatással középpontosan hasonló helyzetbe hozhatók. 1 pont

Így viszont $FTD\sphericalangle = 90^\circ$, ezzel az állítást bizonyítottuk. 1 pont

2. megoldás. Használjuk az előző megoldás ábráját és jelöléseit.

Az ACB derékszögű háromszöget a CT magasság két hasonló háromszögre bontja. Eszerint $BT : BC = CT : CA$, de mivel $FB = BC$ és $CD = CA$, ezért $BT : FB = CT : CD$. 2 pont

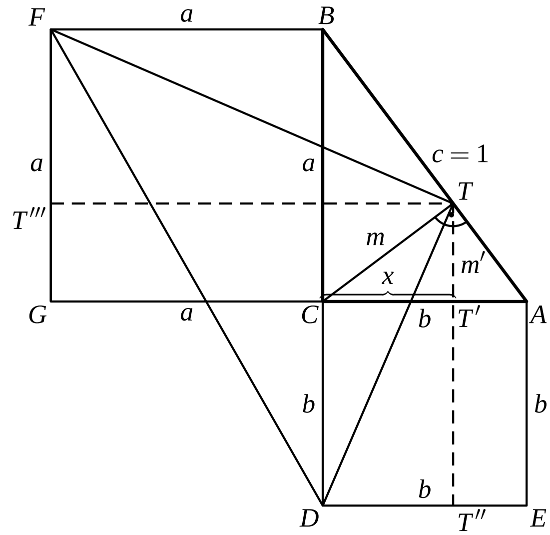
FBT és DCT merőleges szárú tompaszögek ($FB \perp BC$, azaz CD, illetve $BT \perp CT$), így FBT és DCT hasonló háromszögek. 2 pont

A hasonló háromszögek megfelelő szögei egyenlők, így $BTF\sphericalangle = CTD\sphericalangle$, ebből 1 pont

$$FTD\sphericalangle = FTC\sphericalangle + CTD\sphericalangle = FTC\sphericalangle + BTF\sphericalangle = BTC\sphericalangle = 90^\circ.$$ 2 pont

Összesen: **7 pont**

3. megoldás. Használjuk az ábra jelöléseit!



Mivel a hasonlósági transzformáció szögtartó, ezért legyen a derékszögű háromszög átfogója egységnyi, ekkor $a^2 + b^2 = 1$.

A területképlet alapján ekkor a derékszögű háromszög magassága: $m = a \cdot b$ 1 pont

$$CAT\triangle \sim ABC\triangle \quad \Rightarrow \quad \frac{m'}{b} = \frac{m}{c} \quad \Rightarrow \quad m' = ab^2,$$
$$CT'T\triangle \sim BCA\triangle \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{m} = \frac{a}{c} \quad \Rightarrow \quad x = a^2b.$$ 1 pont

Felírjuk Pitagorasz tételét a TDT' háromszögben:

$$\begin{aligned} DT^2 &= \left(b + ab^2\right)^2 + \left(a^2b\right)^2 = \\ &= b^2 + 2ab^3 + a^2b^4 + a^4b^2 = \\ &= b^2 + 2ab^3 + a^2b^2\left(a^2 + b^2\right) = \\ &= b^2 + 2ab^3 + a^2b^2. \end{aligned}$$ 1 pont

Ugyanígy felírjuk Pitgorasz tételét a TFT''' háromszögben:

$$\begin{aligned} FT^2 &= \left(a + a^2b\right)^2 + \left(a - ab^2\right)^2 = \\ &= a^2 + 2a^3b + a^4b^2 + a^2 - 2a^2b^2 + a^2b^4 = \\ &= 2a^2 + 2a^3b + a^2b^2\left(a^2 + b^2\right) - 2a^2b^2 = \\ &= 2a^2 + 2a^3b - a^2b^2. \end{aligned}$$ 1 pont

Végül felírjuk Pitagorasz tételét az FDB háromszögben:

$$FD^2 = a^2 + (a+b)^2 = a^2 + 1 + 2ab.$$ 1 pont

$$DT^2 + FT^2 = a^2 + a^2 + b^2 + 2ab^3 + 2a^3b = a^2 + 1 + 2ab\left(a^2 + b^2\right) = a^2 + 1 + 2ab.$$ 1 pont

Mivel $DT^2 + FT^2 = FD^2$, ezért Pitagorasz tételének megfordítása miatt $FTD = 90°$. 1 pont

Összesen: **7 pont**