Haladók II. kategória 3. (döntő) forduló

1. Egy iskolában a tanulók 10 fős csapatokat szerveztek. Egy diák több csapatnak is tagja lehet, vagy akár egyiknek sem. A csapatok száma 500. Bizonyítsuk be, hogy a diákokat el lehet helyezni két terembe úgy, hogy minden csapatnak mindkét teremben legyen tagja. **7 pont**

2. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójához tartozó magasságának talppontja T. Az átfogón kijelöljük a P és a Q pontokat úgy, hogy $AP = AC$ és $BQ = BC$ legyen. Az AC befogón az M, az BC befogón az N pontot úgy jelöljük ki, hogy $CM = CT = CN$ legyen. Bizonyítsuk be, hogy a $QPNCM$ ötszög területének és az ABC háromszög területének aránya $2r : R$, ahol r az ABC háromszög beírt körének a sugara, R pedig a köré írt körének a sugara. **7 pont**

3. Az a, b, c, d pozitív egész számokra teljesül az $ad = b^2 + bc + c^2$ egyenlőség. Bizonyítsuk be, hogy $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ összetett szám. **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy iskolában a tanulók 10 fős csapatokat szerveztek. Egy diák több csapatnak is tagja lehet, vagy akár egyiknek sem. A csapatok száma 500. Bizonyítsuk be, hogy a diákokat el lehet helyezni két terembe úgy, hogy minden csapatnak mindkét teremben legyen tagja. **7 pont**

Megoldás. A tanulók száma legyen n, akkor az n diák a két teremben 2^n-féleképpen helyezkedhet el. 1 pont

Tegyük fel, hogy nincs ilyen elhelyezés. 1 pont

Ez azt jelentené, hogy minden elrendezés esetén van legalább 1 csapat, amelynek a tagjai ugyanabba a terembe kerülnek. 1 pont

Mivel a legalább az egyik csapatot alkotó 10 diák már bent van az egyik teremben, akkor a többiek 2^{n-10}-féle módon rendeződhetnek. 1 pont

Viszont az egy terembe szorult csapat 2 teremből választhat, így számukra a lehetőségek száma

$$2 \cdot 2^{n-10} = 2^{n-9}.$$ 1 pont

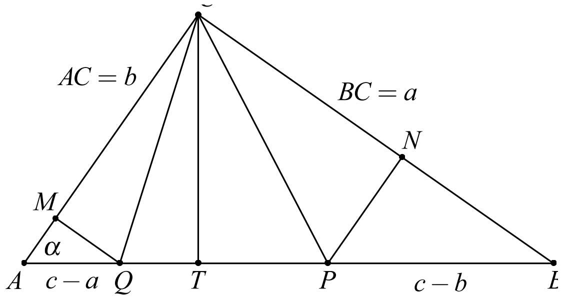
Mivel bármelyik csapattal előfordulhat, hogy egy terembe kerülnek, az összes lehetőség a tanulók elhelyezkedésére legfeljebb $500 \cdot 2^{n-9}$. 1 pont

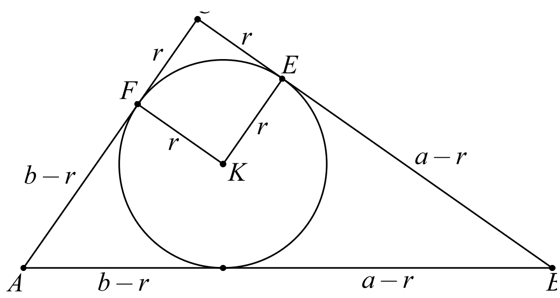
Ez viszont kevesebb, mint $512 \cdot 2^{n-9} = 2^n$, az összes elhelyezkedési lehetőség, ellentmondásra jutottunk, azaz a kiindulási feltétel volt rossz. (Tehát tuduni olyan elrendezést készíteni, melyben minden csapatnak mindkét teremben van tagja.) 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Az ABC derékszögű háromszög AB átfogójához tartozó magasságának talppontja T. Az átfogón kijelöljük a P és a Q pontokat úgy, hogy $AP = AC$ és $BQ = BC$ legyen. Az AC befogón az M, az BC befogón az N pontot úgy jelöljük ki, hogy $CM = CT = CN$ legyen. Bizonyítsuk be, hogy a $QPNCM$ ötszög területének és az ABC háromszög területének aránya $2r : R$, ahol r az ABC háromszög beírt körének a sugara, R pedig a köré írt körének a sugara. **7 pont**

1. megoldás. Az A csúcsnál lévő szög legyen α. Az APC háromszög egyenlő szárú, ezért $ACP\sphericalangle = \dfrac{180^\circ - \alpha}{2}$.





$ACT\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$, ezért $TCP\sphericalangle = ACP\sphericalangle - ACT\sphericalangle = \dfrac{\alpha}{2}$.

Az A-nál lévő α szög és a $TCB\sphericalangle$ szög merőleges szárú szögek, ezért $TCB\sphericalangle = \alpha$, így $PCB\sphericalangle = TCB\sphericalangle - TCP\sphericalangle = \dfrac{\alpha}{2}$.

Tehát $TCP\sphericalangle = PCB\sphericalangle = \dfrac{\alpha}{2}$, azaz a PC szakasz felezi a $TCB\sphericalangle$ szöget. 2 pont

Ezért a T pont CP egyenesre vonatkozó tükörképe a CB befogóra esik, és mivel $CN = CT$, ezért T tükörképe éppen az N pont, így a TPC háromszög CP-re vonatkozó tükörképe az NPC háromszög, ezért $T_{NPC} = T_{TPC}$. 1 pont

Hasonlóan belátható, hogy $TCQ\sphericalangle = QCA\sphericalangle = \frac{\beta}{2}$, ahol β az ABC háromszög B csúcsánál lévő szöge, és így a TCQ háromszög CQ egyenesére vonatkozó tükörképe az MCQ háromszög, ezért $T_{MCQ} = T_{TCQ}$.

Tehát a $QPNCM$ ötszög területe megegyezik a PQC háromszög területének a kétszeresével. 1 pont

Így azt kell belátni, hogy $2T_{PQC} : T_{ABC} = 2r : R$, azaz $T_{PQC} : T_{ABC} = r : R$.

A PQC háromszögnek és az ABC háromszögnek a CT szakasz közös magassága, ezért a két háromszög területének aránya egyenlő a PQ szakasz és az $AB = 2R$ szakasz arányával. 1 pont

Legyen $AB = c$, $CA = b$ és $CB = a$. Ekkor $AQ = AB - BQ = c - a$, $BP = AB - AP = c - b$, így

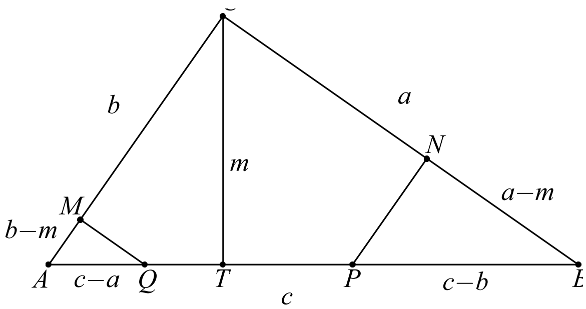
$$PQ = c - (c-a) - (c-b) = a + b - c,$$ 1 pont

ami éppen az ABC háromszögbe írt kör átmérője (ez a jobb oldali ábrán látszik, nyilván $b - r + a - r = c$)

Tehát $T_{PQC} : T_{ABC} = 2r : 2R = r : R$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. megoldás.



A háromszög oldalait a szokott módon a, b, c-vel, a magasságot m-mel jelölve:

$$AM = b - m \quad \text{és} \quad AQ = c - a.$$ 1 pont

A derékszögű háromszög területképletéből:

$$2T = c \cdot m = a \cdot b \Longrightarrow m = \frac{ab}{c}.$$

Valamint ismert, hogy a beírt kör, illetve a köré írt kör sugara:

$$r = \frac{a+b-c}{2} \quad \text{és} \quad R = \frac{c}{2}.$$ 1 pont

Ekkor

$$\frac{AM}{AQ} = \frac{b-m}{c-a} = \frac{b - \frac{ab}{c}}{c-a} = \frac{\frac{b\cdot(c-a)}{c}}{c-a} = \frac{b}{c} = \frac{AC}{AB}$$

és az A csúcsnál lévő szög az AQM és az ABC háromszögek közös szöge, tehát $AQM\triangle \sim ABC\triangle$, hiszen a két oldal aránya és a közbezárt szög megegyezik. A hasonlóság aránya: $\lambda_1 = \frac{c-a}{c}$. 1 pont

Hasonló módon a $PBN\triangle \sim ABC\triangle$ és a hasonlóság aránya $\lambda_2 = \frac{c-b}{c}$. 1 pont

A *QPNCM* ötszög területét a háromszög területével kifejezve:

$$T_{QPNCM} = T - \lambda_1^2 \cdot T - \lambda_2^2 \cdot T = \left(1 - \frac{(c-a)^2}{c^2} - \frac{(c-b)^2}{c^2}\right) \cdot T$$ 1 pont

A területek aránya tehát (felhasználva a Pitagorasz-tételt):

$$1 - \frac{(c-a)^2}{c^2} - \frac{(c-b)^2}{c^2} = \frac{c^2 - c^2 - a^2 + 2ac - c^2 - b^2 + 2bc}{c^2} = \frac{2ac + 2bc - 2c^2}{c^2}$$ 1 pont

Az ismert képleteket felhasználva:

$$\frac{2ac + 2bc - 2c^2}{c^2} = \frac{2a + 2b - 2c}{c} = \frac{a + b - c}{\frac{c}{2}} = \frac{2r}{R}$$

Ezzel az állítást bebizonyítottuk. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Az a, b, c, d pozitív egész számokra teljesül az $ad = b^2 + bc + c^2$ egyenlőség. Bizonyítsuk be, hogy $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ összetett szám. **7 pont**

Megoldás.

Indirekt bizonyítást alkalmazva tegyük fel, hogy $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = p$, ahol p prímszám. Ekkor

$$\begin{aligned} p &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = (a^2 + 2ad + d^2) + (b^2 + c^2 - 2ad) = \\ &= (a+d)^2 + b^2 + c^2 - 2(b^2 + bc + c^2) = (a+d)^2 - (b^2 + 2bc + c^2) = \\ &= (a+d)^2 - (b+c)^2 = [(a+d) - (b+c)]\,[(a+d) + (b+c)] \end{aligned}$$ 2 pont

Mivel a p prímszám csak $1 \cdot p$ formában bontható szorzattá, és $a + d - b - c < a + d + b + c$, ezért $a + d - b - c = 1$ és $a + d + b + c = p$. 1 pont

A kapott két egyenlőségből az elsőt vizsgálva:

$$\begin{aligned} a + d &= b + c + 1 \\ a^2 + 2ad + d^2 &= b^2 + c^2 + 1 + 2bc + 2b + 2c \\ a^2 + 2b^2 + 2bc + 2c^2 + d^2 &= b^2 + c^2 + 1 + 2bc + 2b + 2c \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2b - 2c &= 1 \\ a^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 + d^2 &= 3 \end{aligned}$$ 2 pont

A pozitív egész számok halmazán a kapott egyenlőség csak abban az esetben állhat fenn, ha $a = d = 1$ és $\{b-1; c-1\} = \{0; 1\}$. Ebben az esetben viszont az $ad = b^2 + bc + c^2$ egyenlőség nem teljesül.

Ellentmondásra jutottunk, ami azt jelenti, hogy $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ összetett szám. 2 pont

Összesen: **7 pont**