Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2019/2020-as tanév
Haladók III. kategória, 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Jelölje $[a;b]$ az a és b pozitív egész számok legkisebb közös többszörösét. Legyen n olyan pozitív egész szám, amelyre

$$[n;n+1] > [n;n+2] > [n;n+3] > \cdots > [n;n+9].$$

Bizonyítsuk be, hogy $[n;n+9] > [n;n+10]$. **7 pont**

Megoldás. Jelölje $(a;b)$ az a és b pozitív egész számok legnagyobb közös osztóját. Ekkor $(a;b) = \dfrac{a \cdot b}{[a;b]}$, és mivel $n(n+1) < n(n+2) < \cdots < n(n+9)$, ezért a feladat feltétele alapján:

$$(n;n+1) < (n;n+2) < \cdots < (n;n+9). \qquad (1)$$ 2 pont

Másrészt $(n;n+m) \mid n+m$ és $(n;n+m) \mid n$ miatt: $(n;n+m) \mid (n+m)-n = m$, innen adódik, hogy $(n;n+m) \leq m$. 1 pont

Az $1 \leq (n;n+m) \leq m$ és az (1) figyelembevételével: $(n;n+m) = m$ $(m = 1,2,\ldots,9)$. Innen

$$[n;n+9] = \frac{n(n+9)}{9} = \frac{n^2}{9} + n. \qquad (2)$$ 1 pont

Másfelől $(n;n+2) = 2$ és $(n;n+5) = 5$ miatt $2 \mid n$ és $5 \mid n$, és innen $10 \mid n$, illetve emiatt $10 \mid (n+10)$ adódik. Ebből következik, hogy $10 = (n;n+10)$. 1 pont

Innen kapjuk (a korábbi (2) figyelembevételével) a következőt:

$$[n;n+10] = \frac{n(n+10)}{(n;n+10)} = \frac{n(n+10)}{10} = \frac{n^2}{10} + n < \frac{n^2}{9} + n = [n;n+9].$$

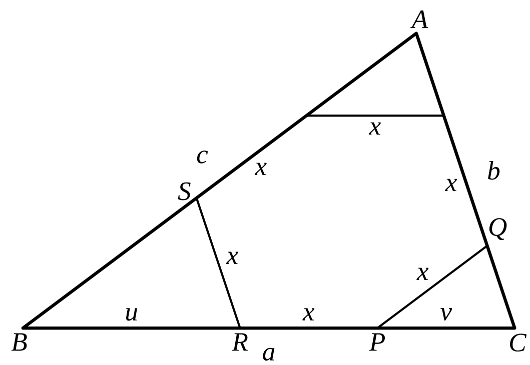
És éppen ezt akartuk belátni. 2 pont

Megjegyzés. Létezik a feltételeknek megfelelő n (mégpedig végtelen sok). n lehet például $n = k!$ alakú, ha $k \geq 7$.

Összesen: **7 pont**

2. Egy háromszög mindegyik oldalán kijelölünk két-két pontot úgy, hogy a hat pont egy olyan hatszög hat csúcsa legyen, amelynek minden oldala egyenlő, és szemközti oldalai párhuzamosak. Bizonyítsuk be, hogy a hatszög kerülete nem lehet nagyobb, mint a háromszög kerületének a kétharmad része! **7 pont**

Megoldás. A háromszög oldalai $BC = a$, $CA = b$ és $AB = c$, a hatszögé pedig x.



A BRS és az BCA háromszög hasonlók, ezért $\frac{u}{x} = \frac{a}{b}$, innen $u = \frac{a}{b}x$. 1 pont

A PCQ és az BCA háromszög hasonlók, ezért $\frac{v}{x} = \frac{a}{c}$, innen $v = \frac{a}{c}x$. 1 pont

$u + x + v = a$, azaz $\frac{a}{b}x + x + \frac{a}{c}x = a$, innen $x = \frac{1}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$. 2 pont

Ezután a $\frac{6}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \frac{2}{3}(a + b + c)$ egyenlőtlenséget kell belátni.

1. lehetőség: Ez ekvivalens a $\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leq \frac{a + b + c}{3}$ egyenlőtlenséggel, ami nyilván igaz, mert az egyenlőtlenség bal oldalán az oldalak hosszának a harmonikus közepe, jobb oldalán az oldalak hosszának számtani közepe áll. És a szélsőértéket az $a = b = c$ esetben fel is veszi. 3 pont

2. lehetőség: A bizonyítandó egyenlőtlenség ekvivalens a $9 \leq (a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$ egyenlőtlenséggel. A zárójelek felbontása és rendezés után a $6 \leq \frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a}$ egyenlőtlenség adódik, ami igaz, mert egy pozitív számnak és a reciprok értékének az összege legalább 2. És a szélsőértéket az $a = b = c$ esetben fel is veszi. 3 pont

Összesen: **7 pont**

3. Az a_n sorozat a következő rekurzióval adott:

$$a_1 = 1; \quad a_n = \frac{n^2}{n-1} \cdot a_{n-1} \quad (n \geq 2).$$

Legyen továbbá $s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$. Igazoljuk, hogy

$$2020 \mid s_{100} + 1.$$ **7 pont**

Megoldás. Az első néhány a_n kiszámolása után látható, hogy $a_n = n \cdot n!$. Ezt fogjuk először bizonyítani. a_n-t „végigvezetve” a_1-ig, teleszkópos szorzatot kapunk, majd egyszerűsítve adódik:

$$a_n = \frac{n^2}{n-1} \cdot \frac{(n-1)^2}{n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{3^2}{2} \cdot \frac{2^2}{1} \cdot 1 = n^2 \cdot (n-1)! = n \cdot n!$$ 2 pont

Kicsit tovább alakítva: $a_n = n \cdot n! = (n+1)n! - 1 \cdot n! = (n+1)! - n!$. 1 pont

Innen s_n-re újabb „teleszkóp”, egy teleszkópos összeg adódik:

$$s_n = (2! - 1!) + (3! - 2!) + (4! - 3!) + \ldots + (n! - (n-1)!) + ((n+1)! - n!) = (n+1)! - 1.$$

Azaz $s_{100} + 1 = 101! - 1 + 1 = 101!$. 2 pont

Másfelől 2020 prímfelbontása: $2020 = 101 \cdot 5 \cdot 2^2$. Mivel $2^2 \mid 101!$, $5 \mid 101!$, $101 \mid 101!$, ezért $2020 \mid 101! = s_{100} + 1$. És ezt akartuk bizonyítani. 2 pont

Összesen: **7 pont**

4. Legyen n pozitív egész szám, jelölje $h(n)$ azt, hogy n hányféleképpen áll elő a 3 hatványainak összegeként. Mennyi a

$$h(2020) - \big(h(673) + h(672) + h(671) + \ldots h(1)\big)$$

különbség? (Itt 3 hatványán 3-nak nemnegatív egész kitevőjű hatványait értjük. Ha két előállítás csak a tagok sorrendjében különbözik, akkor e két előállítást nem különböztetjük meg.) **7 pont**

Megoldás. Írjuk fel 2020-at 3 hatványainak összegeként úgy, hogy balról jobbra haladva a kitevők nem csökkenhetnek. A felírásban szereplő 3^0 kifejezések összege legyen E, a többi tag összege legyen T. 2 pont

Mivel T osztható 3-mal ezért T értéke $0, 3, 6, \ldots, 2019$ lehet. 1 pont

Tekintsük csak azokat a tagokat, amelyek T-hez tartoznak.

$T = 2019$ esetén ezen tagok összegéből a 3 kiemelhető. Így csak a 673-at kell előállítani, ez $h(673)$ módon lehetséges. Az ilyen előállításokat 3-mal szorozni kell, majd egy darab 1-et az elejére írni. Így az összes olyan előállítást megkapjuk pontosan egyszer, amely egy 1-gyel kezdődik.

$T = 2016$ esetén ezen tagok összegéből a 3 kiemelhető. Így csak a 672-t kell előállítani, ez $h(672)$ módon lehetséges. Az ilyen előállításokat 3-mal szorozni kell, majd négy darab 1-et az elejére írni. Így az összes olyan előállítást megkapjuk pontosan egyszer, amely négy 1-gyel kezdődik.

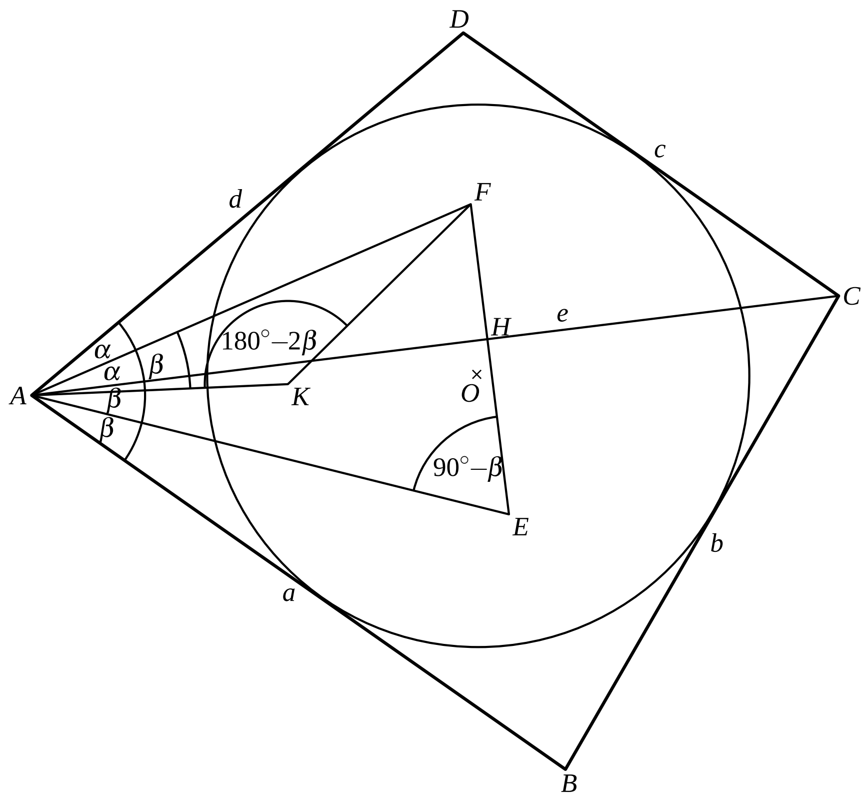
Így lépünk hármasával visszafelé egészen $T = 0$-ig. 2 pont

Tehát a $h(673) + h(672) + h(671) + \ldots h(1)$ összegben a 2020 összes előállítása szerepel egy kivételével, amikor 2020-at csupa 1-gyel állítjuk elő (ez tartozik $T = 0$-hoz). Ezért a kérdezett különbség 1. 2 pont

Összesen: **7 pont**

5. Egy $ABCD$ érintőnégyszög beírt körének középpontja O. Az ACD és ABC háromszögek beírt köreinek középpontja F és E. Az AEF háromszög köréírt körének középpontja K. Bizonyítsuk be, hogy A, O és K egy egyenesen vannak! **7 pont**

Megoldás. Jelöljük a négyszög oldalait és AC átlóját az ábra szerint. $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $AC = e$.



Érintse az ACD háromszög beírt köre AC-t H_1-ben, ABC beírt köre pedig H_2-ben.

$AH_1 = \dfrac{d+e-c}{2}$, $AH_2 = \dfrac{a+e-b}{2}$. 1 pont

Mivel érintőnégyszögről van szó, ezért $d-c = a-b$, emiatt $AH_1 = AH_2$, azaz $H_1 \equiv H_2 \equiv H$. 1 pont

Az AHF$\sphericalangle = 90^\circ$, valamint $AHE\sphericalangle = 90^\circ$, ezért F, H, E egy egyenesen vannak, és AH az $AEF\triangle$ magassága. 1 pont

Használjuk ki, hogy AF felezi a $DAC\sphericalangle$-et, valamint AE felezi a $CAB\sphericalangle$-et, ezért az A-nál levő szög két α-ból és két β-ból áll. 1 pont

$AEH\triangle$-ből $AEH\sphericalangle = 90^\circ - \beta$, a középponti és kerületi szögek tétele alapján

$$AKF\sphericalangle = 180^\circ - 2\beta.$$

Mivel $AKF\triangle$ egyenlő szárú, ezért $KAF\sphericalangle = \beta$. 2 pont

Ebből $DAK\sphericalangle = \alpha + \beta$, tehát AK felezi a négyszög A-nál levő szögét, és ezen a félegyenesen van a beírt kör középpontja is. 1 pont

Összesen: **7 pont**