Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2019/2020-as tanév

1. forduló

Kezdők I–II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. A bűvös négyzet egy olyan négyzet alakú számtáblázat, amelynek minden egyes oszlopában, sorában és átlójában szereplő három szám összege ugyanannyi. Ezt az összeget szokás bűvös összegnek nevezni. Adjuk meg a mellékelt megkezdett (3×3-as) bűvös négyzet minden lehetséges kitöltését! **6 pont**

	2	
3		4

Megoldás. Jelölje a bűvös összeget b! Ennek segítségével kifejezhető a középső, illetve az alatta álló érték (ábra). 1 pont

	2	
3	$b-7$	4
	5	

Ha a bal fölső négyzetben álló számot a-val jelöljük, akkor az első sorban álló harmadik szám $b-a-2$, az első oszlopban álló harmadik szám pedig $b-a-3$. Ezek összegéhez hozzáadva a középső számot, b-t kapunk:

$$b-a-3+b-7+b-a-2=b,$$

ahonnan $2b-12=2a$, vagyis $a=b-6$.

Vagyis a mellékelt ábrában látható értékeket kapjuk. 1 pont

$b-6$	2	4
3	$b-7$	4
3	5	

Ekkor, mivel az utolsó oszlopban (vagy sorban) álló számok összege is b, a hiányzó szám csak $b-8$ lehet. 1 pont

Ellenőriznünk kell, hogy minden b értékre teljesülnek-e a bűvös négyzetre kirótt feltételek.

Mivel a másik átlóban álló számok összege is b, így $b-6+b-7+b-8=b$, vagyis $2b=21$, ahonnan $b=10{,}5$ adódik. 1 pont

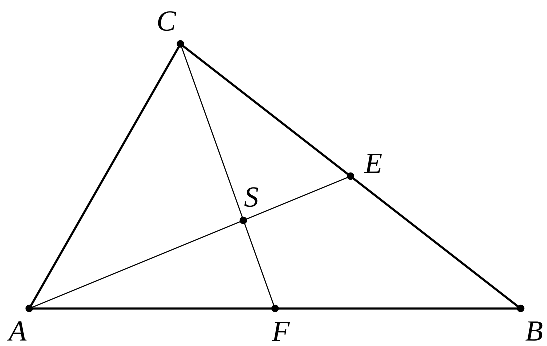
Egyetlen lehetséges b értéket kaptunk, 1 pont

amelyre a kitöltött bűvös négyzet a mellékelt ábrán látható. 1 pont

4,5	2	4
3	3,5	4
3	5	2,5

Összesen: **6 pont**

2. Az ABC háromszög AB oldala 26 cm. Az A csúcsból induló súlyvonal 18 cm, a C csúcsból induló súlyvonal pedig 15 cm hosszú. Mekkora a háromszög területe? **6 pont**



Megoldás. Készítsünk ábrát! Jelölje F az AB oldal felezőpontját és S a háromszög súlypontját! 1 pont

A súlypont a súlyvonal csúcstól távolabbi harmadolópontja, ezért $AS = 12$ cm és $SF = 5$ cm. 1 pont

Mivel F felezi az AB oldalt, ezért $AF = 13$ cm. 1 pont

Az ASF háromszög oldalaira: $5^2 + 12^2 = 13^2$, így a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt ASF háromszög S-nél derékszögű. 1 pont

Így az ACF háromszögben AS magasság. Az ACF háromszög területe tehát $\frac{15 \cdot 12}{2} = 90\ \text{cm}^2$. 1 pont

A súlyvonal felezi a háromszög területét, így $T_{ABC} = 2 \cdot T_{ACF} = 180\ \text{cm}^2$. 1 pont

Összesen: **6 pont**

Megjegyzés. Ha a tanuló az 5, 12, 13 oldalú háromszög területét Héron-képlettel számítja ki, és megmutatja, hogy a háromszög területe annak 6-szorosa, akkor is teljes pontszám jár.

3. Hány olyan négyjegyű pozitív egész szám van, amelynek tízes számrendszerbeli alakjában a számjegyek szorzata osztható 10-zel? **6 pont**

1. megoldás. Mivel $10 = 2 \cdot 5$ és $(2, 5) = 1$, ezért a számjegyek szorzata pontosan akkor osztható 10-zel, ha a számjegyek között szerepel legalább egy 5-tel osztható és legalább egy páros számjegy. Jelölje H a négyjegyű pozitív egész számok halmazát, továbbá A_1 legyen azon négyjegyű pozitív egész számok halmaza, amelyek tízes számrendszerbeli alakja nem tartalmaz 0-s vagy 5-ös számjegyet, valamint A_2 azon négyjegyű pozitív egészek halmaza, amelyek tízes számrendszerbeli alakjában nem szerepel páros számjegy. Ekkor a $H \setminus (A_1 \cup A_2)$ halmaz elemszámát keressük, amelyet a szita formula segítségével a következő módon határozhatunk meg:

$$|H \setminus (A_1 \cup A_2)| = |H| - |A_1| - |A_2| + |A_1 \cap A_2|,$$

ahol az abszolút érték az elemszámot jelöli. 1 pont

A H halmaz elemszáma $9 \cdot 10^3 = 9000$, hiszen az első helyre kilencféle számjegy kerülhet (a 0 nem), a többire pedig tízféle. 1 pont

Az A_1 halmaz elemszáma $8^4 = 4096$, hiszen sem 0, sem 5 nem kerülhet egyik helyre sem. 1 pont

Az A_2 halmaz elemszáma $5^4 = 625$, hiszen mind a négy számjegy ötféle páratlan szám közül kerülhet ki. 1 pont

Az $A_1 \cap A_2$ halmaz elemszáma $4^4 = 256$, hiszen mind a négy számjegy négyféle páratlan szám közül kerülhet ki (5-ös nem lehet). 1 pont

Ekkor a szita formula alapján a $H \setminus (A_1 \cup A_2)$ halmaz elemszáma: $9000 - 4096 - 625 + 256 = 4535$. 1 pont

Összesen: **6 pont**

2. megoldás. Mivel $10 = 2 \cdot 5$ és $(2, 5) = 1$, ezért a számjegyek szorzata pontosan akkor osztható 10-zel, ha a számjegyek között szerepel legalább egy 5-tel osztható és legalább egy 2-vel osztható (páros) számjegy.

Összesen 9000 négyjegyű szám van. 1 pont

Ezek közül biztosan nem felelnek meg azok, amelyek egyik számjegye sem osztható 5-tel, azaz amelyeknek a számjegyei az $\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9\}$ halmazból valók. Ezek száma $8^4 = 4096$. 1 pont

Azok sem felelnek meg, amelyekben ugyan szerepel az 5-ös, de minden további számjegyük páratlan. Ezeket úgy kapjuk meg, hogy az összes csupa páratlan számjegyű négyjegyű számok közül kihagyjuk azokat, amelyekben nem szerepel az 5-ös. 1 pont

A csupa páratlan számjegyű négyjegyű számok száma $5^4 = 625$, 1 pont

az 5-ös számjegyet nem tartalmazó négyjegyű számok száma $4^4 = 256$. 1 pont

Így az 5-öst tartalmazó csupa páratlan számjegyből álló négyjegyű számok száma $5^4 - 4^4 = 369$.

Tehát összesen $9000 - 4096 - 369 = 4535$ megfelelő négyjegyű szám marad. 1 pont

Összesen: **6 pont**

4. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$\left[\frac{x}{2}\right] + \left[\frac{2x}{3}\right] = x$$

egyenletet, ahol $[x]$ azt a legnagyobb egész számot jelenti, amely még nem nagyobb, mint x. **6 pont**

Megoldás. Mivel az egyenlet bal oldalán szereplő kifejezések értéke egész szám, ezért $x \in \mathbb{Z}$. 1 pont

Legyen $x = 6 \cdot q + r$, ahol $q \in \mathbb{Z}$, és $r = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. 2 pont

a) $r = 0$ esetén $q = 0$ és $x = 0$,

b) $r = 1$ esetén $q = 1$ és $x = 7$,

c) $r = 2$ esetén $q = 0$ és $x = 2$,

d) $r = 3$ esetén $q = 0$ és $x = 3$,

e) $r = 4$ esetén $q = 0$ és $x = 4$,

f) $r = 5$ esetén $q = 0$ és $x = 5$ adódik.*

A kapott x értékeket ellenőrizve, azok kielégítik az egyenletet. Tehát az egyenlet megoldásai:

$$M = \{0, 2, 3, 4, 5, 7\}.$$ 3 pont

Megjegyzés. * 1–2 megtalált megoldás 1 pont, 3–4 megoldás 2 pont, 5–6 megoldás 3 pont.

Összesen: **6 pont**