

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2019/2020-as tanév

Kezdők I–II. kategória, 2. forduló

Kezdők III. kategória, 1. forduló

Feladatok

1. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely 5-tel osztva 2, 7-tel osztva 3, 11-gyel osztva pedig 5 maradékot ad? 6 pont

2. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a pozitív valós számpárok halmazán:

$$\frac{1}{a} = 2b + 1 - b^2 - a.$$

6 pont

3. Az ABC szabályos háromszögben D és E rendre az AC és AB oldalak pontjai, P pedig a BD és CE szakaszok metszéspontja. Határozzuk meg a BPE szög nagyságát, ha az $AEPD$ négyszög és a BCP háromszög területe egyenlő. 8 pont

4. Egy 3×3 -as táblázat minden mezője fehér vagy szürke színű. Ezt a táblázatot újraszínezzük a következő szabály szerint:

- azok a mezők, amelyeknek páros számú (0, 2 vagy 4) oldalszomszédja szürke, szürkék lesznek;
- azok a mezők, amelyeknek páratlan számú (1 vagy 3) oldalszomszédja szürke, fehérek lesznek.

Ha például a kiindulási táblázat ez:  , akkor ezt a táblázatot kapjuk: .

a) Adjuk meg az összes olyan kiindulási táblázatot, amelyet a fenti módon újraszínezzve olyan táblázatot kapunk, amelynek minden mezője szürke! 4 pont

b) Adjuk meg az összes olyan kiindulási táblázatot, amelyet a fenti módon újraszínezzve olyan táblázatot kapunk, amelynek minden mezője fehér! 2 pont

c) Adjuk meg az összes olyan kiindulási táblázatot, amelyen az újraszínezést 2020-szor egymás után végrehajtva a kapott táblázat minden mezője szürke lesz! 4 pont

5. Egy 30 csapatos bajnokságban eddig 14 fordulót rendeztek. Minden fordulóban minden csapat pontosan egy mérkőzést játszott, mégpedig egy olyan csapattal, amellyel korábban még nem játszott. Igazoljuk, hogy van három olyan csapat, amelyek között még egyetlen mérkőzést sem játszottak le. 10 pont