Kezdők I. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Az $ABCD$ négyszögben $AB = BC = CD$, továbbá az $ABC\sphericalangle = 70^\circ$, a $BCD\sphericalangle = 170^\circ$. Mekkora a $DAB\sphericalangle$ nagysága? **10 pont**

2. Hány hegyesszögű, derékszögű, illetve tompaszögű háromszöget határoznak meg egy szabályos húszszög csúcsai? **10 pont**

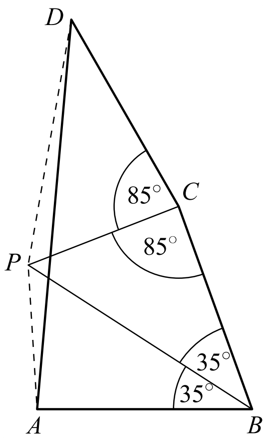
3. Legyen p egy 3-nál nagyobb prímszám úgy, hogy az a és b pozitív egész számokra teljesül a $p^2 + a^2 = b^2$ egyenlőség. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

a) a osztható 12-vel, és
b) $2(p+a+1)$ négyzetszám. **10 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Az $ABCD$ négyszögben $AB = BC = CD$, továbbá az $ABC\sphericalangle = 70^\circ$, a $BCD\sphericalangle = 170^\circ$. Mekkora a $DAB\sphericalangle$ nagysága? **10 pont**

1. megoldás. Készítsünk ábrát. 1 pont



Az ABC és BCD belső szögek szögfelezőjének metszéspontját jelölje P. 1 pont

Az ABP és BCP háromszögek egybevágóak, ugyanis PB közös oldaluk, továbbá $AB = BC$ és $ABP\sphericalangle = PBC\sphericalangle = 35^\circ$. 2 pont

Ebből következően

$$BPA\sphericalangle = CPB\sphericalangle = 180^\circ - 85^\circ - 35^\circ = 60^\circ. \qquad \text{1 pont}$$

Az előbbiekhez hasonló módon a DPC és BPC háromszögek is egybevágóak, mert a C-nél lévő szögük megegyezik és az ezt közrefogó oldalak páronként egyenlő hosszúak. 2 pont

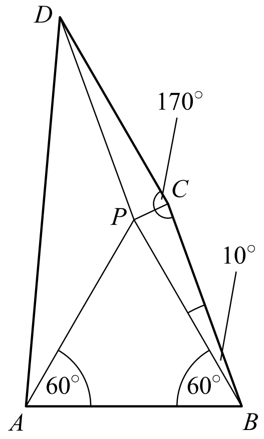
Emiatt $DPC\sphericalangle = CPB\sphericalangle = 60^\circ$. 1 pont

Ez azt jelenti, hogy $BPA\sphericalangle + CPB\sphericalangle + DPC\sphericalangle = 180^\circ$, tehát P valójában az AD oldalra esik. 1 pont

Ekkor viszont a DAB szög megegyezik a PAB szöggel, így $DAB\sphericalangle = 180^\circ - 60^\circ - 35^\circ = 85^\circ$. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. megoldás. Készítsünk ábrát. 1 pont



Vegyük fel a P pontot a négyszög belsejében úgy, hogy az ABP háromszög szabályos legyen. 1 pont

Ekkor $PB = AB = BC$ miatt a PBC háromszög egyenlő szárú. 1 pont

Mivel $ABP\sphericalangle = 60°$, ezért $PBC\sphericalangle = 70° - 60° = 10°$ és így $BCP\sphericalangle = 85°$. 1 pont

A P pont tehát rajta van a C csúcsnál lévő szög szögfelezőjén. 1 pont

Ekkor a CDP és CBP háromszögek egybevágóak, mert két-két oldal és az ezen két oldal által bezárt szög egyenlő, így $PD = PB = PA$. 1 pont

Következésképpen a PCD és az APD háromszög is egyenlő szárú. 1 pont

A PCD egyenlő szárú háromszögben $DPC\sphericalangle = PCD\sphericalangle = 85°$, ezért

$$APD\sphericalangle = 360° - BPA\sphericalangle - CPB\sphericalangle - DPC\sphericalangle =$$
$$= 360° - 60° - 85° - 85° = 130°.$$ 1 pont

Így az APD egyenlő szárú háromszögben $DAP\sphericalangle = 25°$. 1 pont

Tehát $DAB\sphericalangle = DAP\sphericalangle + PAB\sphericalangle = 25° + 60° = 85°$. 1 pont

Összesen: **10 pont**

2. Hány hegyesszögű, derékszögű, illetve tompaszögű háromszöget határoznak meg egy szabályos húszszög csúcsai? **10 pont**

Megoldás. A húszszög csúcsai által meghatározott háromszögek köré írt köre a húszszög köré írt kör. Ha a háromszög hegyesszögű, akkor a köré írt kör középpontja a háromszög belsejében, ha derékszögű, akkor a háromszög oldalán, ha tompaszögű, akkor pedig a háromszögön kívül található. 2 pont

Számoljuk meg először a derékszögű háromszögeket! Ezek egyik oldalán rajta van a köré írt kör középpontja, tehát az a húszszög egyik szimmetriaátlója. Válasszuk ki először ezt az oldalt: ezt 10-féleképpen tehetjük meg. A harmadik csúcs 18-féle lehet, így összesen $10 \cdot 18 = 180$ derékszögű háromszög van. 2 pont

Most számoljuk meg a tompaszögű háromszögeket! Mindegyik háromszöget a tompaszögű csúcstól pozitív forgásirányban elhelyezkedő csúcshoz rendelve számoljuk meg. Ezt a csúcsot 20-féleképpen választhatjuk ki. A háromszög másik két csúcsa a kiválasztott csúcsból húzott szimmetriaátlótól „jobbra” esik. Ezt a két csúcsot $\binom{9}{2} = 36$-féleképpen választhatjuk ki. Tehát összesen $20 \cdot 36 = 720$ tompaszögű háromszög van. 3 pont

Végül számoljuk meg a hegyesszögű háromszögeket! Összesen $\binom{20}{3} = 1140$ háromszöget határoznak meg a húszszög csúcsai. Közülük hegyesszögű $1140 - 720 - 180 = 240$. 3 pont

Tehát a húszszög csúcsai 240 hegyesszögű, 180 derékszögű és 720 tompaszögű háromszöget határoznak meg.

Megjegyzés. A háromszögek leszámolhatók úgy is, hogy megnézzük, milyen egész hosszúságú részekre bontják a háromszög csúcsai a 20 egységnyi körívet. Ahhoz, hogy a háromszög tompaszögű legyen, az ívek között kell lennie 10 egységnél hosszabbnak. Ahhoz, hogy derékszögű legyen, kell lennie 10 egység nagyságúnak. Hegyesszögű háromszög esetén minden ív hossza rövidebb 10 egységnél.

A 20 felbontásai	Darabszám
$2+9+2$	20
$3+8+9$	40
$4+7+9$	40
$4+8+8$	20
$5+6+9$	40
$5+7+8$	40
$6+6+8$	20
$6+7+7$	20

Összesen: **10 pont**

3. Legyen p egy 3-nál nagyobb prímszám úgy, hogy az a és b pozitív egész számokra teljesül a $p^2+a^2=b^2$ egyenlőség. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

a) a osztható 12-vel, és
b) $2(p+a+1)$ négyzetszám. **10 pont**

Megoldás. *a)* Az egyenlőséget átrendezve, majd nevezetes azonosság segítségével a b^2-a^2 kifejezést szorzattá alakítva kapjuk, hogy

$$p^2=b^2-a^2=(b-a)(b+a)$$ 1 pont

A megadott feltétel miatt $b>a$, így a két tényező pozitív egész és $b+a>b-a$, tehát p^2 szorzattá bontása csak egyféleképpen lehetséges, ha $b-a=1$ és $b+a=p^2$. 1 pont

Ebből

$$b=\frac{p^2+1}{2} \qquad \text{és} \qquad a=\frac{p^2-1}{2},$$ 1 pont

$$2a=p^2-1=(p-1)(p+1).$$ 1 pont

Második megoldás (az első négy pontra). A feltétel miatt p, a és b alap pitagoraszi számhármas (p prím volta miatt), tehát a primitív pitagoraszi számhármasokra vonatkozó összefüggés szerint

$$p=m^2-n^2, \quad a=2mn, \quad \text{és} \quad b=m^2+n^2,$$

ahol m és n olyan pozitív egészek, amelyekre $m>n$, $(m;n)=1$, illetve m és n különböző paritású (mivel p páratlan, így $a=2mn$). 1 pont

Ebből $p=(m-n)(m+n)$, ami a feltételeket tekintve csak egyféleképpen valósulhat meg:

$$m-n=1 \qquad \text{és} \qquad m+n=p$$ 1 pont

Ebből

$$m=\frac{p+1}{2}; \qquad n=\frac{p-1}{2},$$ 1 pont

amiből

$$a=\frac{(p+1)(p-1)}{2}, \qquad \text{azaz} \qquad 2a=(p+1)(p-1).$$ 1 pont

Azt kell igazolnunk, hogy $(p-1)(p+1)$ osztható 24-gyel, hiszen az, hogy $2a$ osztható 24-gyel, szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a osztható 12-vel.

Tekintve, hogy p páratlan prím, így $p-1$ és $p+1$ is páros.

$p-1$ és $p+1$ közül pontosan az egyik 4-gyel is osztható, tehát a szorzatuk osztható 8-cal. 1 pont

Mivel p egy 3-nál nagyobb prím, így $p-1$ és $p+1$ közül pontosan az egyik 3-mal is osztható. 1 pont

Tehát $(p-1)(p+1)$ osztható 8-cal és 3-mal, azaz 24-gyel. 1 pont

Második megoldás (az utóbbi három pontra). Egy 3-nál nagyobb prím 6-tal osztva 1 vagy -1 maradékot ad, azaz a p prím $6k+1$ vagy $6k-1$ alakú (ahol k pozitív egész). 1 pont

Tehát

$$(p-1)(p+1) = 6k(6k+2) = 12k(3k+1) \text{ vagy } (p-1)(p+1) = (6k-2)6k = 12k(3k-1).$$ 1 pont

Azt kell megmutatnunk, hogy $k(3k+1)$ vagy $k(3k-1)$ szorzat páros: ha k páros, akkor a szorzat első tényezője páros, ha k páratlan, akkor szorzat második tényezője páros, tehát a szorzat bármilyen k pozitív egészre páros. 1 pont

Megjegyzés. A bizonyításból tehát azt is megkapjuk, hogy bármilyen $p > 3$ prímszámra pontosan egy ilyen p, a, b számhármas létezik, például $p = 5$-re $a = 12$ és $b = 13$.

b)

$$2(p+a+1) = 2\left(p+\frac{p^2-1}{2}+1\right) = 2p+p^2-1+2 = p^2+2p+1 = (p+1)^2,$$

tehát a kérdezett kifejezés valóban négyzetszám. 3 pont

Összesen: **10 pont**