

## Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2020/2021-es tanév

### Haladók II. kategória 1. forduló

#### Feladatok

1. Bizonyítsuk be, hogy  $5a^2 + 4ab - b^2$  ( $a$  és  $b$  egész számok) akkor és csak akkor osztható 3-mal, ha  $a + b$  is osztható 3-mal. 7 pont
2. Egy dobozban 20 golyó található,  $p$  db piros,  $f$  db fehér és  $z$  db zöld színű. Ha a dobozban a fehér golyók számát megdupláznánk, akkor egy piros golyó kihúzásának az esélye  $\frac{1}{25}$ -del csökkenne. Ha a dobozból minden piros golyót kivennénk, akkor egy fehér golyó húzásának esélye  $\frac{1}{16}$ -dal nőne. Határozzuk meg  $p$ ,  $f$ ,  $z$  értékét. 7 pont
3. Egy falu 2020 lakójáról tudjuk, hogy bármely három embert választva közülük, ebből a háromból van kettő, akik egymás között szoktak telefonon üzenetet váltani. Egy hírt szeretnénk ennek a 2020 embernek eljuttatni. Igazoljuk, hogy ki lehet jelölni két embert a faluból úgy, hogy nekik elmondjuk a hírt, és ők ketten 2018 üzenettel az összes többi emberhez eljuttatják! 7 pont
4. Egy derékszögű háromszög oldalai egész számok, és a terület mérőszáma kétszerese a kerület mérőszámának. Mekkora az oldalak? 7 pont
5. Az  $ABCD$  paralelogramma  $A$  csúcsnál lévő szöge  $60^\circ$ . Az  $AB$  és  $CD$  oldalak felezőpontjai köré egymást és egy-egy szomszédos oldalt érintő 3 egység sugarú félköröket rajzoltunk az ábrán látható módon. Mekkora az ábrán berajzolt, a két kört és az oldalt érintő kis kör sugara, illetve mekkorák a paralelogramma oldalai? 7 pont

