Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2020/2021-es tanév

Haladók II. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Bizonyítsuk be, hogy $5a^2+4ab-b^2$ (a és b egész számok) akkor és csak akkor osztható 3-mal, ha $a+b$ is osztható 3-mal. **7 pont**

Megoldás.

$$5a^2+4ab-b^2=(5a-b)(a+b).$$ 3 pont

Ha $3 \mid a+b$, akkor nyilván $(5a-b)(a+b)$ is osztható 3-mal. 1 pont

Ha $3 \mid (5a-b)(a+b)$, akkor – mivel a 3 prímszám – $3 \mid a+b$ (és ebben az esetben az állítás igaz) vagy $3 \mid 5a-b$. 1 pont

Mivel $5a-b=6a-(a+b)$, ez akkor és csak akkor osztható 3-mal, ha $a+b$ is, tehát az állítás ebben az esetben is igaz. 2 pont

Összesen: **7 pont**

2. Egy dobozban 20 golyó található, p db piros, f db fehér és z db zöld színű. Ha a dobozban a fehér golyók számát megdupláznánk, akkor egy piros golyó kihúzásának az esélye $\frac{1}{25}$-del csökkenne. Ha a dobozból minden piros golyót kivennénk, akkor egy fehér golyó húzásának esélye $\frac{1}{16}$-dal nőne. Határozzuk meg p, f, z értékét. **7 pont**

Megoldás. A feladat feltételei alapján:

$$p+f+z=20 \tag{1}$$

$$\frac{p}{20+f}=\frac{p}{20}-\frac{1}{25} \tag{2}$$

$$\frac{f}{20-p}=\frac{f}{20}+\frac{1}{16} \tag{3}$$

2 pont

A (2)-es egyenlet alapján:

$$\frac{p}{20}-\frac{p}{20+f}=\frac{1}{25}\iff\frac{pf}{20+f}=\frac{4}{5} \tag{4}$$

1 pont

A (3)-as egyenlet figyelembevételével:

$$\frac{f}{20-p}-\frac{f}{20}=\frac{1}{16}\iff\frac{pf}{20-p}=\frac{5}{4} \tag{5}$$

1 pont

A (4), (5)-ös egyenlőségek megfelelő oldalainak elosztásával:

$$\frac{20-p}{20+f}=\frac{16}{25}\iff f=\frac{180-25p}{16}$$

1 pont

f-et az (5)-ös egyenletbe helyettesítve:

$$\frac{180p-25p^2}{16(20-p)}=\frac{5}{4}\iff p^2-8p+16=0$$

1 pont

A kapott másodfokú egyenletet megoldva:

$$p=4,\qquad f=\frac{180-25p}{16}=5\quad\text{és}\quad z=20-p-f=11.$$

A kapott számok teljesítik a feladat feltételeit, tehát a dobozban eredetileg 4 piros, 5 fehér és 11 zöld golyó volt. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Egy falu 2020 lakójáról tudjuk, hogy bármely három embert választva közülük, ebből a háromból van kettő, akik egymás között szoktak telefonon üzenetet váltani. Egy hírt szeretnénk ennek a 2020 embernek eljuttatni. Igazoljuk, hogy ki lehet jelölni két embert a faluból úgy, hogy nekik elmondjuk a hírt, és ők ketten 2018 üzenettel az összes többi emberhez eljuttatják! **7 pont**

Megoldás. Vegyünk egy tetszőleges lakót, hívjuk Bélának.

Nézzük Béla összes üzenőtársát. Ha 2019 üzenőtársa van, akkor csak Bélának kell a hírt elmondani és még egy tetszőleges embernek. Ilyenkor Béla küld 2018 üzenetet, a másik kiválasztott nem küld egyet sem. 2 pont

Ha Béla nem üzen mindenkinek, akkor tekintsünk egy olyan embert, akinek Béla nem üzen. Legyen ő Gergő. 1 pont

Gergő már üzen az összes többi embernek. Hiszen ha Gergő például nem üzenne Katának, akkor a Béla, Gergő, Kata hármasban nem lenne üzenetváltás. 3 pont

Tehát Bélának és Gergőnek kell a hírt elmondani, és ők ketten összesen2018 üzenettel továbbadják a többi lakosnak. 1 pont

Összesen: **7 pont**

4. Egy derékszögű háromszög oldalai egész számok, és a terület mérőszáma kétszerese a kerület mérőszámának. Mekkorák az oldalak? **7 pont**

Megoldás. Jelöljük a befogókat a-val és b-vel, az átfogót c-vel.

A feltétel szerint:
$$\frac{1}{2}ab = 2(a+b+c).$$ 1 pont

Ebből c-t kifejezve és négyzetre emelve
$$c = \frac{1}{4}ab - a - b,$$
$$c^2 = \frac{1}{16}a^2b^2 + a^2 + b^2 - \frac{1}{2}a^2b - \frac{1}{2}ab^2 + 2ab.$$ 1 pont

Pitagorasz tételét felhasználva:
$$a^2b^2 - 8a^2b - 8ab^2 + 32ab = 0.$$ 1 pont

Mivel $ab \neq 0$, ezzel egyszerűsítve és mindkét oldalhoz 32-t adva
$$ab - 8a - 8b + 64 = 32.$$ 1 pont

A bal oldalt szorzattá alakítva:
$$(a-8)(b-8) = 32.$$ 1 pont

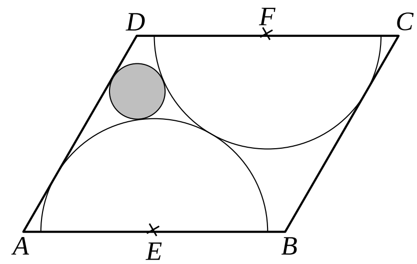
32-t kell két egész szám szorzataként felírni. Ez a sorrendtől eltekintve hatféleképpen lehetséges: $(32\cdot 1,\ 16\cdot 2,\ 8\cdot 4,\ (-8)\cdot(-4),\ (-16)\cdot(-2),\ (-32)\cdot(-1)$. 1 pont

Az utolsó három eset nem felel meg a feladat feltételeinek, ezért az oldalakra három megoldás adódik: 40, 9 és 41, 24, 10 és 26, 16, 12 és 20. 1 pont

Összesen: **7 pont**

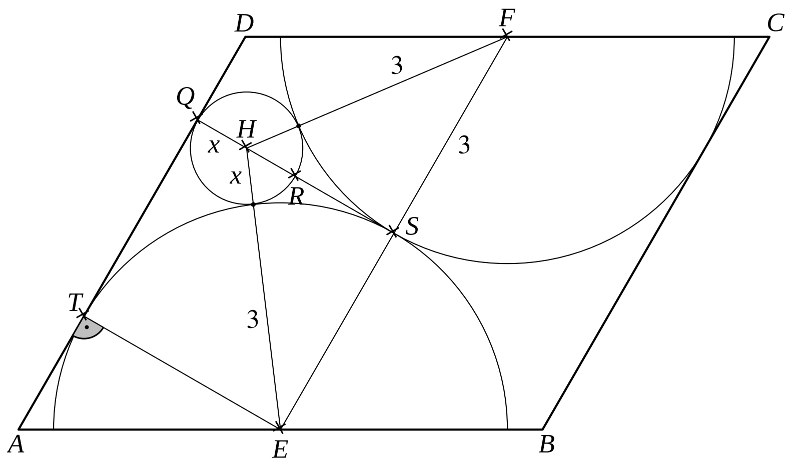
Megjegyzés. Ha valaki próbálgatással megtalálja az összes megoldást, de nem bizonyítja, hogy több nincs, legfeljebb 2 pontot kaphat.

5. Az $ABCD$ paralelogramma A csúcsnál lévő szöge 60°. Az AB és CD oldalak felezőpontjai köré egymást és egy-egy szomszédos oldalt érintő 3 egység sugarú félköröket rajzoltunk az ábrán látható módon. Mekkora az ábrán berajzolt, a két kört és az oldalt érintő kis kör sugara, illetve mekkorák a paralelogramma oldalai?



7 pont

Megoldás.



Mivel a két kör érintkezési pontja rajta van az EF középvonalon, 1 pont

így a paralelogramma ezzel párhuzamos oldalai, $BC = DA = 6$ egység hosszúak, 1 pont

a másik két oldalának hossza az ATE derékszögű háromszögre felírt Pitagorasz-tételből adódik:

$$AB = CD = 4\sqrt{3} \text{ egység.}$$ 1 pont

A kis kör sugarát x-szel jelölve, kihasználva, hogy az érintkező körök érintési pontja rajta van a centrálison, 1 pont

a Pitagorasz-tételt felírva a HSF derékszögű háromszögre:

$$(3+x)^2 = 3^2 + (3-x)^2$$ 2 pont

A keresett kis kör sugara $x = \dfrac{3}{4}$. 1 pont

Összesen: **7 pont**