Haladók II. kategória 3. (döntő) forduló

Feladatok

1. Az $ABCDE$ körbe írható ötszögben $AB = BC = CD$. Az AC és BE átlók a K pontban, az AD és CE átlók pedig az L pontban metszik egymást. Mutassuk meg, hogy $AK = KL$. **7 pont**

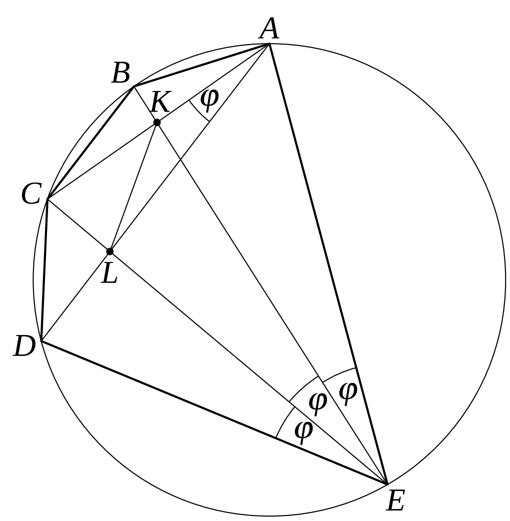
2. Melyek azok az x és y természetes számok, amelyek igazzá teszik az alábbi egyenletet:

$$x \cdot (y - 18) + 7 = x \cdot \sqrt{\frac{x+y}{3}}$$ **7 pont**

3. 2021 nemnegatív valós szám összege 1. Válasszunk ki közülük kettőt az összes lehetséges módon, a kétféle sorrend külön lehetőségnek számít. Képezzük a két szám szorzatának és összegének szorzatát, majd adjuk össze az igy kapott szorzatokat. Mennyi ennek az összegnek a maximuma? **7 pont**

Megoldások és javítási útmutató

1. Az $ABCDE$ körbe írható ötszögben $AB = BC = CD$. Az AC és BE átlók a K pontban, az AD és CE átlók pedig az L pontban metszik egymást. Mutassuk meg, hogy $AK = KL$. **7 pont**



Megoldás. Mivel adott körben az azonos hosszúságú ívekhez azonos nagyságú kerületi szögek tartoznak, ezért $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD}$,

innen $BEA\sphericalangle = CEB\sphericalangle = DEC\sphericalangle = DAC\sphericalangle = \varphi$, 2 pont

amiből következik, hogy $LEK\sphericalangle = LAK\sphericalangle = \varphi$, azaz $AKLE$ húrnégyszög. 2 pont

Az $AKLE$ húrnégyszög körülírt körében az $\widehat{AK}$ ívhez tartozó kerületi szögek egyenlősége alapján:

$$KLA\sphericalangle = KEA\sphericalangle = BEA\sphericalangle = \varphi.$$ 1 pont

Így $KLA\sphericalangle = LAK\sphericalangle = \varphi$, 1 pont tehát az AKL háromszög egyenlő szárú, és $AK = KL$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Melyek azok az x és y természetes számok, amelyek igazzá teszik az alábbi egyenletet:

$$x \cdot (y-18)+7 = x \cdot \sqrt{\frac{x+y}{3}}$$ **7 pont**

Megoldás. Mivel $x = 0$ nem megoldás, így x-szel osztva a két oldalt:

$$y-18+\frac{7}{x} = \sqrt{\frac{x+y}{3}}.$$

Az egyenlet bal oldalán racionális szám áll, ezért $\sqrt{\frac{x+y}{3}}$ is racionális.

Azaz $\sqrt{\frac{x+y}{3}} = \frac{p}{q}$, ahol $(p;q) = 1$. Innen $x+y = \frac{3p^2}{q^2}$. 1 pont

A bal oldalon egész szám áll, ezért q^2 osztója a $3p^2$-nek, ezért $(p;q) = 1$ miatt q^2 osztója a 3-nak, ezért $q = 1$. 1 pont

Tehát $x+y = 3p^2$, ezért $\frac{x+y}{3}$ négyzetszám, így $\sqrt{\frac{x+y}{3}} \in \mathbb{N}$. 1 pont

Ebből következik, hogy $\frac{7}{x} \in \mathbb{N}$, tehát $x = 1$ vagy $x = 7$. 2 pont

A megoldandó egyenletbe helyettesítve kapjuk, hogy $x = 1$ esetén y nem egész szám, 1 pont

$x = 7$ esetén $y = 20$. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. 2021 nemnegatív valós szám összege 1. Válasszunk ki közülük kettőt az összes lehetséges módon, a kétféle sorrend külön lehetőségnek számít. Képezzük a két szám szorzatának és összegének szorzatát, majd adjuk össze az igy kapott szorzatokat. Mennyi ennek az összegnek a maximuma? **7 pont**

Megoldás. Egy szorzat így néz ki: $x_i x_j (x_i + x_j)$. Bontsuk fel a zárójelet: $x_i^2 x_j + x_j^2 x_i$. 1 pont

Ha tekintjük az összes szorzatot és mindenütt felbontjuk a zárójelet, akkor megállapíthatjuk, hogy egy adott x_i^2 mellett az összes az összes x_j szerepelni fog pontosan kétszer, kivéve magát x_i-t, mivel $x_i^2 x_j$ szerepel $x_i x_j (x_1 + x_j)$-ben, valamint $x_j x_i (x_i + x_j)$-ben.

Ezért x_i^2-et kiemelve ezekből, a zárójelben a többi szám összegének kérszerese lesz, ami $2-2x_i$. Tehát az eredeti összeg felírható $\sum_i x_i^2 \cdot 2(1-x_i)$ alakban.

Tekintsük ezt a szorzatot: $x_i^2(1-x_i) = x_i x_i (1-x_i)$. Mivel $x_i(1-x_1) \leq \frac{1}{4}$, 1 pont ezért $2x_ix_i(1-x_i) \leq \frac{1}{2}x_i$, tehát az S összeg maximum

$$\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \ldots + \frac{1}{2}x_n = \frac{1}{2}$$

lehet. 2 pont

Ezt el tudjuk érni, ha két számot $\frac{1}{2}$-nek, a többit 0-nak választunk, azaz a maximum $\frac{1}{2}$. 1 pont

Összesen: **7 pont**