**Bolyai János**
**Matematikai Társulat**

# Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

# 2020/2021-es tanév

## Haladók III. kategória 1. forduló

### Megoldások és javítási útmutató

**1.** Határozzuk meg, hogy pontosan mely értékeket veheti fel az alábbi kifejezés?

$$[2a+3b]-[a]-[b]-[a+2b]$$

Az $a$ és $b$ tetszőleges valós számok, $[c]$ pedig a $c$ egész részét jelöli. **7 pont**

**Megoldás.** Jelöljük $a$ egészrészét $x$-szel, törtrészét $h$-val, $b$ egészrészét $y$-nal, törtrészét $k$-val.

Azaz $a=x+h$, $b=y+k$, ahol $h,k \in [0,1[$. Ezeket $a$ és $b$ helyére beírva kapjuk, hogy $[2a+3b]=[2x+3y+2h+3k]$, valamint $[a+2b]=[x+2y+h+2k]$. 1 pont

Használjuk ki, hogy ha egy $r$ valós számot felírunk $r=z+m$ alakban, ahol $z$ egész szám, akkor

$$[r]=z+[m]\,.$$

Emiatt $[2x+3y+2h+3k]=2x+3y+[2h+3k]$, ugyanígy $[x+2y+h+2k]=x+2y+[h+2k]$.

Mindezeket az eredeti kifejezésbe helyettesítve kapjuk, hogy

$$[2a+3b]-[a]-[b]-[a+2b]=[2h+3k]-[h+2k]\,.$$ 2 pont

$h,k \in [0;1[$ miatt a kisebbítendő értéke 0, 1, 2, 3, 4 lehet, a kivonandóé 0, 1, 2.

Vegyük figyelembe, hogy $[2h+3k] \geq [h+2k]$. Ezért a különbség értéke 0, 1, 2, 3, 4 lehet. 1 pont

A 4 nem valósulhat meg, mert ehhez az kellene, hogy $2h+3k \geq 4$ és $h+2k \leq 1$ egyszerre teljesüljön, ami lehetetlen, hiszen a második egyenlőtlenséget 2-vel szorozva $2h+4k \leq 2$ adódik, ami ellentmondásban áll az elsővel. 1 pont

A 3 bekövetkezhetne úgy, hogy $4-1$, vagy $3-0$.

Az első esetben $2h+3k \geq 4$ és $2 > h+2k \geq 1$ kellene, de a másodikat 2-vel szorozva itt is kiderül az ellentmondás.

A második esethez az kellene, hogy és $4 > 2h+3k \geq 3$ és $1 > h+2k \geq 0$, de a másodikat 2-vel szorozva itt is ellentmondásra jutunk. 1 pont

A 2 megvalósulhat $3-1$ alakban, például $h=0{,}19$, $k=0{,}9$ választásasal.

Az 1 megvalósulhat $1-0$ alakban például $h=0{,}6$, $k=0$ választással.

A 0 is könnyen elérhető például $h=0$, $k=0$ esetén.

Azaz a kifejezés a 0, 1, 2 értékeket veszi fel. 1 pont

**Összesen:** **7 pont**

**2.** Határozzuk meg az összes olyan $n$ pozitív egész számot, melyre egy $n \times n$-es táblázat mezői kitölthetők az 1, 2, $-3$ számokkal úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban a számok összege 0 legyen. **7 pont**

**Megoldás.** $n = 1$, 2 esetén a megfelelő kitöltés nem valósítható meg, hiszen ha a táblázat kitöltéséhez nem használjuk a $-3$-at, akkor a sor- és oszlopösszegek mindegyike pozitív lesz, ha viszont valamelyik mezőbe beírjuk a $-3$-at, akkor ezen cella sorában és oszlopában negatív összeget kapunk. 1 pont

$n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}^+$ esetén viszont a megfelelő kitöltés mindig megvalósítható. A táblázat kitöltése az alábbi konstrukció szerint valósítható meg:

- Először kitöltjük az 1, 2, $-3$ segítségével az első sort úgy, hogy a benne levő számok összege 0 legyen.
- Ezután a 2., 3., …, $n$. sort a megadott sorrendben úgy töltjük ki, hogy a felettük levő sorhoz képest a számokat mindig eggyel jobbra toljuk. Tehát
  - a $(k+1)$. sor 2. eleme a $k$. sor 1. eleme lesz ($k = 1, 2, \ldots, n-1$);
  - a $(k+1)$. sor 3. eleme a $k$. sor 2. eleme lesz,
  - $\vdots$
  - a $(k+1)$. sor $n$. eleme a $k$. sor $(n-1)$. eleme lesz,
  - végül a $(k+1)$. sor 1. eleme a $k$. sor $n$. eleme lesz. 1 pont

$n = 3m$, $n \in \mathbb{N}^+$ esetén az első sor kitöltéséhez például az $(1,2,-3)$ számsorozatot használhatjuk fel $m$-szer, 1 pont

$n = 3m+1$ esetén az $(1,1,1,-3)$ számsorozatot az $(1,2,-3)$ számhármas követheti $\dfrac{n-4}{3}$-szor, 1 pont

$n = 3m+2$ esetén a $(2,2,2,-3,-3)$ számsorozatot az $(1,2,-3)$ számhármas követheti $\dfrac{n-5}{3}$-szor. 1 pont

A megfelelő kitöltések szerkezetét az alábbi táblázatok mutatják be $n = 6$, 7, 8 esetén:

$n = 6$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | $-3$ | 1 | 2 | $-3$ |
| $-3$ | 1 | 2 | $-3$ | 1 | 2 |
| 2 | $-3$ | 1 | 2 | $-3$ | 1 |
| 1 | 2 | $-3$ | 1 | 2 | $-3$ |
| $-3$ | 1 | 2 | $-3$ | 1 | 2 |
| 2 | $-3$ | 1 | 2 | $-3$ | 1 |

$n = 7$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | $-3$ | 1 | 2 | $-3$ |
| $-3$ | 1 | 1 | 1 | $-3$ | 1 | 2 |
| 2 | $-3$ | 1 | 1 | 1 | $-3$ | 1 |
| 1 | 2 | $-3$ | 1 | 1 | 1 | $-3$ |
| $-3$ | 1 | 2 | $-3$ | 1 | 1 | 1 |
| 1 | $-3$ | 1 | 2 | $-3$ | 1 | 1 |
| 1 | 1 | $-3$ | 1 | 2 | $-3$ | 1 |

$n = 8$

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2 | 2 | $-3$ | $-3$ | 1 | 2 | $-3$ |
| $-3$ | 2 | 2 | 2 | $-3$ | $-3$ | 1 | 2 |
| 2 | $-3$ | 2 | 2 | 2 | $-3$ | $-3$ | 1 |
| 1 | 2 | $-3$ | 2 | 2 | 2 | $-3$ | $-3$ |
| $-3$ | 1 | 2 | $-3$ | 2 | 2 | 2 | $-3$ |
| $-3$ | $-3$ | 1 | 2 | $-3$ | 2 | 2 | 2 |
| 2 | $-3$ | $-3$ | 1 | 2 | $-3$ | 2 | 2 |
| 2 | 2 | $-3$ | $-3$ | 1 | 2 | $-3$ | 2 |

Mivel

$$m\left[1+2+(-3)\right] = 0, \left[1+1+1+(-3)\right] + \frac{n-4}{3}\left[1+2+(-3)\right] = 0,$$

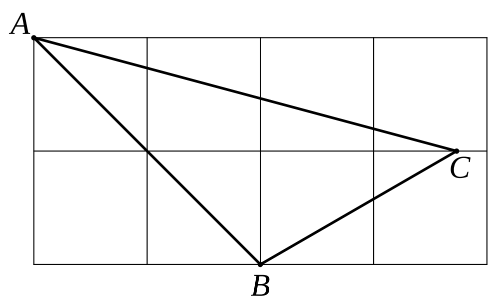
$$\left[2+2+2+(-3)+(-3)\right] + \frac{n-5}{3}\left[1+2+(-3)\right] = 0,$$

ezért minden esetben a táblázat első sorában a beírt számok összege 0. 1 pont

Továbbá, mivel a sorokban a ciklikus jobbra tologatás miatt mindig ugyanaz az $n$ db szám szerepel, ezért a többi sorban is a számok összege csak 0 lehet.
Másrészt mivel az első sor számai a ciklikus jobbra tologatás miatt mindig másik oszlopba kerülnek, ezért mindegyikük minden oszlopba pontosan egyszer jut el. Így oszloponként is a számok összege csak 0 lehet. 1 pont
Ezzel a megadott konstrukció helyességét igazoltuk.

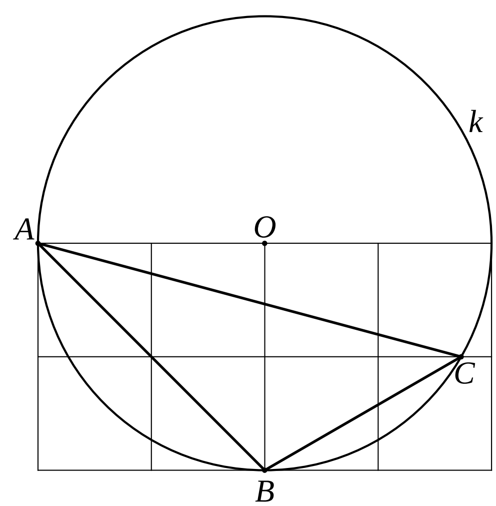
**Összesen:** **7 pont**

**3.** Egy 45°-os szöggel rendelkező $ABC$ háromszöget az ábra szerint lerajzoltunk egy négyzethálós lapra. Határozzuk meg a háromszög másik két szögét. ($A$ és $B$ rácspont.)




**7 pont**

**Megoldás.** Alkalmazzuk az ábra szerinti jelöléseket. Ekkor az $OAB$ egyenlő szárú derékszögű háromszög, hegyesszögei 45°-osak.




$CAB\sphericalangle < OAB\sphericalangle = 45^\circ$ és $ABC\sphericalangle > ABO\sphericalangle = 45^\circ$ alapján az $ABC$ háromszög 45°-os szöge csak a $C$ csúcsnál lehet. 1 pont

Mivel $OA = OB$ és $BOA\sphericalangle = 90^\circ = 2 \cdot BCA\sphericalangle$, ezért az $ABC$ háromszög körülírt körének középpontja $O$ és $OB = OC$. 2 pont

Másrészt $C$ rajta van az $OB$ szakasz felezőmerőlegesén, így $BC = OC$, tehát az $OBC$ háromszög szabályos és $COB\sphericalangle = 60^\circ$. 2 pont

Az adott ívhez tartozó kerületi és középponti szögek viszonyát figyelembe véve:

$$CAB\sphericalangle = \frac{1}{2} COB\sphericalangle = 30^\circ \quad \text{és} \quad ABC\sphericalangle = 180^\circ - BCA\sphericalangle - CAB\sphericalangle = 180^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 105^\circ.$$

Tehát az $ABC$ háromszög másik két szöge 30° és 105° nagyságú. 2 pont

**Összesen:** **7 pont**

**4.** Nevezzük az $n$ pozitív egész számot „prímben gazdag” számnak, ha a prímtényezős felbontásában szereplő prímek mindegyikének négyzetével is osztható. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok „prímben gazdag” szomszédos számpár létezik. **7 pont**

**Megoldás.** A $(8;9)$ számpár megfelel a feladat feltételeinek, mivel $8 = 2^3$ és $2^2 \mid 8$, illetve $9 = 3^2$ és $3^2 \mid 9$. Tehát legalább egy „prímben gazdag” szomszédos számpár biztosan létezik. 1 pont

Használjuk fel az alábbi tulajdonságokat:

*a)* a négyzetszámok „prímben gazdag” számok,
*b)* két „prímben gazdag” szám szorzata is „prímben gazdag” szám.

Az *a)* tulajdonság abból következik, hogy egy négyzetszám prímtényezős felbontásában minden prímszám páros kitevőn szerepel, így minden kitevő 2 vagy annál nagyobb páros szám, ezért a négyzetszám osztható bármely felbontásban szereplő prím négyzetével. 1 pont

A *b)* tulajdonság pedig abból adódik, hogy a két szám szorzatának prímtényezős felbontásában csak azok a prímek szerepelhetnek, amelyek a számok felbontásában megjelentek, és ha a számok valamelyike a prímek valamelyikének négyzetével osztható volt, akkor ez igaz lesz a többszörösére is. 1 pont

A megállapított két tulajdonság alapján legyen $n$ és $n+1$ két szomszédos „prímben gazdag” szám ($n \in \mathbb{N}^+$). Ekkor

– az $n(n+1)$ is „prímben gazdag” szám, 1 pont

– a $4n(n+1)$ is „prímben gazdag” szám, 1 pont

– a $(2n+1)^2$ is „prímben gazdag” szám. 1 pont

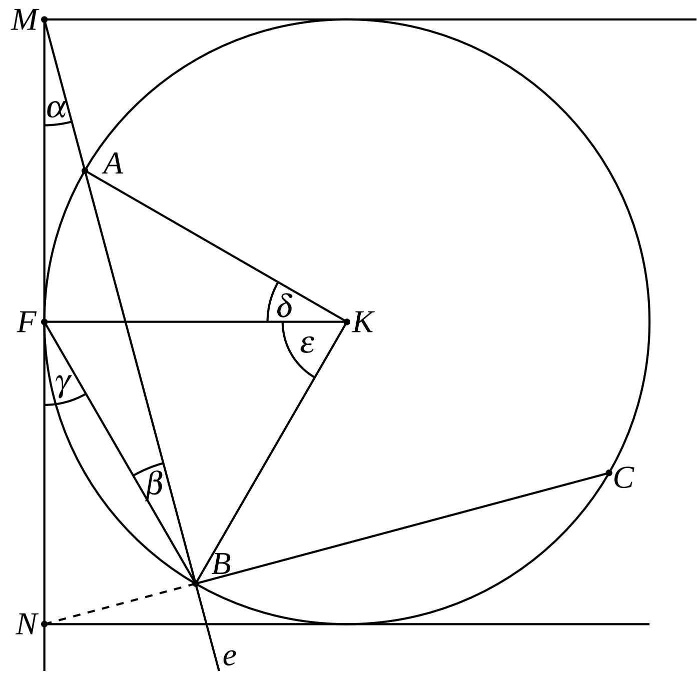
Viszont

$$(2n+1)^2 = 4n^2 + 4n + 1 = 4n(n+1) + 1,$$

így a $(4n^2 + 4n, 4n^2 + 4n + 1)$ szomszédos egészekből álló számpár tagjai is „prímben gazdag” számok. Mivel $n$ értékét a pozitív egészek körében végtelen sokféleképpen megválaszthatjuk, ezért az állítást ezzel igazoltuk. 1 pont

**Összesen:** **7 pont**

**5.** Egy kör érinti az $M$ csúcsú derékszög szárait. A szög csúcsából induló $e$ félegyenes a kört először az $A$, majd a $B$ pontban metszi. A kör rövidebb $\widehat{AB}$ íve a kör kerületének éppen a negyed része. Mekkora szöget zár be az $e$ félegyenes a derékszög száraival? **7 pont**




**1. megoldás.** A kör középpontja $K$, a rövidebb $\widehat{AB}$ ív és a szögszár érintési pontja $F$. Forgassuk el $90^\circ$-kal a $K$ pont körül a derékszöget a körrel együtt. 1 pont

Ekkor a kör képe önmaga, az $M$ csúcsú derékszög képe az $N$ csúcsú derékszög lesz, ennek szárai szintén érintik a kört, az $A$ pont $B$-be, az $AB$ húr a rá merőleges $BC$ húrba megy át. 1 pont

Az $M$ pont rajta van az $AB$ egyenesen, ezért az $N$ pont, ami az $M$ pont képe az elforgatásnál, rajta lesz az $AB$ egyenes képén, ami éppen a $BC$ egyenes.

Ezért az $NBM\sphericalangle = CBA\sphericalangle = 90^\circ$. 1 pont

Thalész tételének megfordítása miatt $FB = FM$, ezért $\beta = \alpha$,

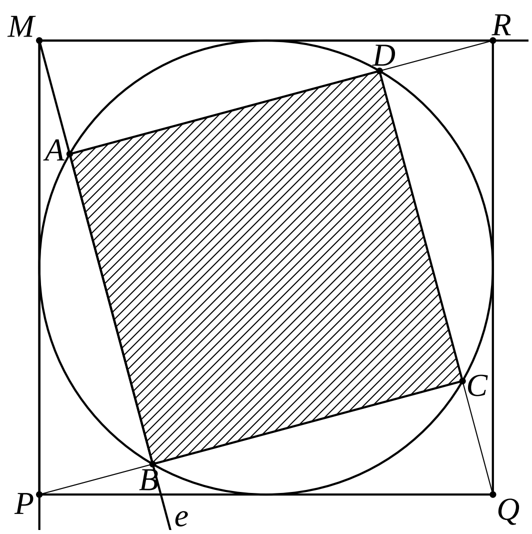
$$\gamma = \alpha + \beta = 2\alpha,$$

mert $\gamma$ külső szöge az $MFB$ háromszögnek.

A középponti és kerületi szögek tétele szerint $\varepsilon = 2\gamma = 4\alpha$ és $\delta = 2\beta = 2\alpha$, 2 pont

így $90^\circ = \delta + \varepsilon = 2\alpha + 4\alpha = 6\alpha$, innen $\alpha = 15^\circ$. 1 pont

**Összesen:** **7 pont**




**2. megoldás.** Vegyük fel az $MPQR$ négyzetet úgy, hogy a megadott kör a beírt köre legyen, $P$ és $R$ pedig a megadott derékszög szárain legyen. Az $MB$ szakaszt $90^\circ$-kal elforgatva a négyzet középpontja körül kapjuk a $PC$ szakaszt, amely átmegy a $B$ ponton, hiszen az az $MB$ szakaszon lévő $A$ pont elforgatottja. Hasonlóan kapjuk a $C$ és $D$ pontokat. 2 pont

Az $ABCD$ négyzet területe az $MPQR$ négyzet területének fele, hiszen az adott körbe írható összes négyzet egyforma területű, és az $MPQR$ oldalfelező pontjai által alkotott négyzetről könnyű látni, hogy fele akkora területű. 2 pont

Így az egybevágó $MPB$, $PQC$, $QRD$ és $RMA$ háromszögeknek együtt a területe szintén fele a négyzet területének, külön-külön tehát területük a négyzet területének nyolcada. 1 pont

Így az átfogóhoz tartozó magasságuk az átfogó negyedével egyenlők. Az jól ismert, hogy ha egy derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága negyede az átfogónak, akkor a szögei nagysága $15^\circ$ és $75^\circ$, azaz a feladat kérdésére is ez a két szög a válasz. 2 pont

(A jól ismert tény bizonyítása: ha $F$ az $MP$ felezőpontját jelöli, akkor a Thalész-tétel megfordítása miatt $BF$ fele az átfogónak. Ha az $MPB$ háromszög magassága a $BT$ szakasz, akkor $BTF$ háromszög olyan derékszögű háromszög, amelynek egyik befogója fele az átfogójának, azaz félszabályos. Innen a szögek már könnyen adódnak).

**Összesen:** **7 pont**

**Megjegyzés.** Az ábra kiegészítése után a feladat trigonometriai ismeretekkel is befejezhető. Ha az $MPQR$ négyzet oldala 2 egység, a fentiekhez hasonlóan adódik, hogy $AB = \sqrt{2}$. Ha az $MA = PB$ szakasz hosszát $x$ jelöli, a Pitagorasz-tételt felírva az

$$(x+\sqrt{2})^2 + x^2 = 2^2$$

egyenlet adódik. Ez a

$$2x^2 + 2\sqrt{2}x - 2 = 0$$

másodfokú egyenlethez vezet, amelynek egyedüli pozitív megoldása $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$. Innen pedig az $PMB\sphericalangle$ szög szinuszára $\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ adódik, amelyről ismert, hogy a hegyesszögek körében csak a $15^\circ$ a megoldása.