Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2020/2021-es tanév

Haladók III. kategória 2. (döntő) forduló

Feladatok

1. Legyenek x, y és z nullától és egymástól páronként különböző valós számok.

a) Bizonyítsuk be, hogy ha x, y és z pozitívak, továbbá $x+\frac{1}{y}$, $y+\frac{1}{z}$, $z+\frac{1}{x}$ és xyz mindegyike racionális, akkor x, y és z is racionális számok.

b) Bizonyítsuk be, hogy ha $x+\frac{1}{y}$, $y+\frac{1}{z}$, $z+\frac{1}{x}$ és xyz mindegyike racionális, de nem feltétlenül pozitívak, akkor x, y és z lehetnek irracionális számok is. **7 pont**

2. Az $ABCD$ négyszögben $DAB\sphericalangle = ABC\sphericalangle = 110°$, $BCD\sphericalangle = 35°$, $ADC\sphericalangle = 105°$ és az AC átló felezi a $DAB\sphericalangle$-et. Határozzuk meg az $ABD\sphericalangle$ nagyságát! **7 pont**

3. A pozitív egész számok a_1, a_2, … sorozatát „hexadecimálisnak” nevezzük, ha bármely nyolc egymást követő tag összege legfeljebb 16, vagyis bármely $i \in \mathbb{N}^+$ esetén

$$a_i + a_{i+1} + \ldots + a_{i+7} \leq 16.$$

Egy m pozitív egész számot „vágáshossznak” nevezzük, ha minden hexadecimális sorozat néhány egymást követő tagjának összege m, azaz léteznek olyan $k \leq l$ ($k, l \in \mathbb{N}^+$) számok, amelyekre

$$\sum_{i=k}^{l} a_i = m.$$

Határozzuk meg m összes lehetséges értékét, vagy bizonyítsuk be, hogy m egyetlen pozitív egész értéket sem vehet fel! **7 pont**