

# Haladók II. kategória 2. forduló

## Feladatok

1. Egy sorozat első tagja egy 1-nél nagyobb  $a_1$  pozitív egész szám. Ha  $n > 1$ , akkor a sorozat  $n$ -edik  $a_n$  tagját a következőképpen kapjuk: ha az  $a_{n-1}$  legnagyobb prímosztója  $p$ , akkor  $a_n = a_{n-1} + p$ . Határozzuk meg az összes olyan  $a_1$  kezdőértéket, amelyre a sorozat valamelyik tagja 2022! **7 pont**

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \quad \mathbf{7 \text{ pont}}$$

3. Egy  $H$  halmaz elemei pozitív egész számok. Teljesül továbbá, hogy  $1 \in H$  és  $2 \in H$ , valamint bármely két  $H$ -beli elem összege nem eleme  $H$ -nak. Bizonyítsuk be, hogy a  $H$  halmaz  $k$ -nál kisebb elemeinek száma kisebb, mint  $\frac{k}{3} + 2$ . **7 pont**

4. Az  $ABC$  egyenlő oldalú háromszög két oldalát is meghosszabbítjuk:  $BC$  oldalát  $C$  irányában  $D$ -ig,  $BA$  oldalát pedig  $A$  irányában  $E$ -ig úgy, hogy  $BD = AE$  teljesüljön. Igazoljuk, hogy az  $ECD$  háromszög egyenlő szárú! **7 pont**