Megoldások és javítási útmutató

1. Egy sorozat első tagja egy 1-nél nagyobb a_1 pozitív egész szám. Ha $n > 1$, akkor a sorozat n-edik a_n tagját a következőképpen kapjuk: ha az a_{n-1} legnagyobb prímosztója p, akkor $a_n = a_{n-1} + p$. Határozzuk meg az összes olyan a_1 kezdőértéket, amelyre a sorozat valamelyik tagja 2022! **7 pont**

Megoldás. Nyilván lehet $a_1 = 2022$.

Legyen a_{n-1} legnagyobb prímosztója p, ekkor $a_{n-1} = p \cdot k$ és $a_n = p \cdot k + p = p(k+1)$, tehát p osztója a_n-nek. Tehát egy tetszőleges tag előtt álló tag legnagyobb prímosztója csak olyan prímszám lehet, amely osztója az adott tagnak. Az is látszik, hogy ha $n > 1$, akkor a_n nem lehet prímszám, hiszen p és $k+1$ mindegyike legalább 2. Továbbá egy adott tag előtt álló tagot úgy kapunk, hogy az adott tagból kivonjuk annak egyik prímosztóját, hiszen $a_{n-1} = a_n - p$, és az előbb láttuk, hogy p osztója az a_n-nek. 1 pont

Tegyük fel, hogy $a_n = 2022$ ($n > 1$). Mi állhat a 2022 előtt a sorozatban?

2022 prímosztói 2, 3 és 337, egyben ezek a p lehetséges értékei. Mivel $a_{n-1} = a_n - p = 2022 - p$, az a_{n-1} lehetséges érétkei: $2022-2 = 2020 = 2^2 \cdot 5 \cdot 101$, $2022-3 = 2019 = 3 \cdot 673$ és $2022 - 337 = 1685 = 5 \cdot 337$. A 2020 legnagyobb prímosztója 101, azaz $p \neq 2$, 2019 legnagyobb prímosztója pedig 673, azaz $p \neq 3$, ezért a_{n-1} csak 1685 lehet. 1 pont

Mi állhat az 1685 előtt, ha nem az az első?

Az $1685 = 5 \cdot 337$ előtt álló tag lehetséges értékei: $1685 - 5 = 1680 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$, $1685 - 337 = 1348 = 2^2 \cdot 337$. Ezek közül az elsőt kizárhatjuk, mert 1680 legnagyobb prímosztója nem 5, tehát az 1685 előtt csak 1348 állhat. 1 pont

Az 1348 – ha nem az van az elején – előtt álló szám lehet $1348 - 2 = 1346 = 2 \cdot 673$ vagy $1348 - 337 = 1011 = 3 \cdot 337$. Mivel 1346 legnagyobb prímosztója nem 2, ezért az 1348 előtt csak $1011 = 3 \cdot 337$ állhat. 1 pont

Az 1011 – ha nem az van az elején – előtt álló szám lehet $1011 - 3 = 1008 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7$ vagy $1011 - 337 = 674 = 2 \cdot 337$. Mivel 1008 legnagyobb prímosztója nem 3, ezért az 1011 előtt csak $674 = 2 \cdot 337$ állhat. 1 pont

A 674 – ha nem az van az elején – előtt álló szám lehet $674-2=672=2^5 \cdot 3 \cdot 7$ vagy $674-337=337$. Mivel 674 legnagyobb prímosztója nem 2, ezért a 674 előtt csak 337 állhat. 1 pont

Mivel 337 prímszám, ezért ha szerepel a sorozatban, akkor csak a sorozat első tagja lehet.

Összegezve: a sorozat első tagja lehet 337, 674, 1011, 1348, 1685 vagy 2022. 1 pont

Összesen: **7 pont**

2. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$x = \sqrt{x - \frac{1}{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$$

7 pont

Megoldás. A nevező miatt $x \neq 0$, és a négyzetgyök miatt $x \geq 1$, valamint x két négyzetgyök összege, ezért x mindenképpen pozitív. Mivel az egyenlet mindkét oldala pozitív, ezért a négyzetre emelés ekvivalens átalakítás.

$$x^2 = x + 1 - \frac{2}{x} + 2\sqrt{\frac{x^3 - x^2 - x + 1}{x^2}} \qquad / \cdot x$$ 1 pont

mivel itt $\sqrt{x^2} = x$, ezért kapjuk, hogy:

$$x^3 = x^2 + x - 2 + 2\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$x^3 - x^2 - x + 2 = 2\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1}$$ 1 pont

Vezessünk be új ismeretlent: $u = \sqrt{x^3 - x^2 - x + 1}$, ezzel az új ismeretlennel egyenletünk így írható fel:

$$u^2 + 1 = 2u$$ 1 pont

$$(u-1)^2 = 0$$

$$u = 1$$

$$\sqrt{x^3 - x^2 - x + 1} = 1$$

$$x^3 - x^2 - x = 0$$

$$x\left(x^2 - x - 1\right) = 0$$ 1 pont

$$x_1 = 0, \qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad x_3 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$ 1 pont

$x_1 = 0$ esetén a törtek nevezője 0 lenne,

$x_3 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ negatív szám, ami nem lehet, mert x csak pozitív lehet. 1 pont

$x_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ pozitív szám, tehát az egyenlet egyetlen megoldása $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, ami megfelel a feladatnak. 1 pont

Összesen: **7 pont**

3. Egy H halmaz elemei pozitív egész számok. Teljesül továbbá, hogy $1 \in H$ és $2 \in H$, valamint bármely két H-beli elem összege nem eleme H-nak. Bizonyítsuk be, hogy a H halmaz k-nál kisebb elemeinek száma kisebb, mint $\dfrac{k}{3} + 2$. **7 pont**

Megoldás. Mivel 1 és 2 eleme a H-nak, ezért a 3 biztosan nem, tehát elegendő 4-től $(k-1)$-ig vizsgálni az elemeket. 1 pont

A 4-től $(k-1)$-ig terjedő egészeket hármas csoportokba osztjuk, $(3i+1; 3i+2; 3i+3)$. Mivel az 1 és a 2 eleme a H-nak, ezért egy ilyen csoportból csak egy elem lehet benne a H halmazban. 2 pont

Mivel 4-től $(k-1)$-ig összesen $k-4$ darab szám van, ezek összesen $\left[\dfrac{k-4}{3}\right]$ darab csoportot alkotnak. 1 pont

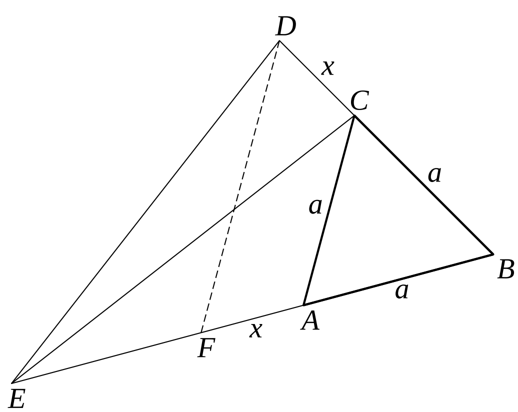
Az utolsó teljes hármas után még legfeljebb két elem lehetne, de ezek közül csak az egyik lehet a halmazban. 1 pont

Így a k-nál kisebb elemek száma legfeljebb

$$2+\left[\frac{k-4}{3}\right]+1=2+\left[\frac{k-1}{3}\right]-1+1=2+\left[\frac{k-1}{3}\right]\le 2+\frac{k-1}{3}<2+\frac{k}{3}.$$ 2 pont

Összesen: **7 pont**

4. Az ABC egyenlő oldalú háromszög két oldalát is meghosszabbítjuk: BC oldalát C irányában D-ig, BA oldalát pedig A irányában E-ig úgy, hogy $BD=AE$ teljesüljön. Igazoljuk, hogy az ECD háromszög egyenlő szárú! **7 pont**



Megoldás. Készítsünk ábrát, a szabályos háromszög oldalait jelöljük a-val. Vegyünk fel az AE szakaszon úgy egy F pontot, hogy $AF=CD(=x)$ teljesüljön, ezt az F pontot kössük össze D-vel. 2 pont

Az EFD és CAE háromszögek egybevágóságát fogjuk belátni, ebből már következik az állítás.

Az FBD háromszög egyenlő oldalú, ezért

$$DF=BD=AE.$$ 1 pont

Másrészt

$$EF=AE-x=BD-x=a=AC,$$ 1 pont

az FE, FD, illetve az AE, AC két-két egyenlő oldal által közrezárt szög is egyenlő (120°). 1 pont

Két-két oldal és a közrezárt szög egyenlősége miatt az EFD és EAC háromszögek egybevágók, 1 pont

azaz harmadik oldalaik is egyenlők: $EC=ED$, vagyis az ECD háromszög egyenlő szárú. 1 pont

Összesen: **7 pont**