Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2022/2023-as tanév

Haladók II. kategória 1. forduló

Feladatok

1. Az $\overline{abcd}$ négyjegyű számot „párosíthatónak” nevezzük, ha $a \geqslant b$ és $\overline{ab} - \overline{cd} = \overline{cd} - \overline{ba}$.

Például a 2011 „párosítható” szám, mivel $20 - 11 = 11 - 02$.

Határozzuk meg, hogy hány ilyen tulajdonságú négyjegyű szám létezik. **7 pont**

2. A páros és páratlan számokat két külön háromszögbe írjuk a következő módon:

$$
\begin{array}{llll}
i) & & & \\
0 & & & \\
2 & 4 & & \\
6 & 8 & 10 & \\
12 & 14 & 16 & 18 \\
\vdots & & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{llll}
ii) & & & \\
1 & & & \\
3 & 5 & & \\
7 & 9 & 11 & \\
13 & 15 & 17 & 19 \\
\vdots & & &
\end{array}
$$

Mutassuk meg, hogy az első esetben a sorok összege 6-tal osztható szám lesz, míg a második esetben köbszám. **7 pont**

3. Legyenek x_1 és x_2 az $x^2 - (a+d) \cdot x + ad - bc = 0$ másodfokú egyenlet megoldásai.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $x^2 - \left(a^3 + d^3 + 3abc + 3bcd\right) \cdot x + (ad - bc)^3 = 0$ másodfokú egyenlet megoldásai x_1^3 és x_2^3. **7 pont**

4. Az $ABCDE$ konvex ötszögben AC párhuzamos DE-vel és BE párhuzamos DC-vel. Bizonyítsuk be, hogy az AED és a BCD háromszög területe egyenlő! **7 pont**

5. Tekintsük azokat a tízes számrendszerbeli számokat, amelyeknek minden számjegye különböző, bármely két szomszédos számjegyük legnagyobb közös osztója legalább 2, és az előző két feltétel teljesülése mellett a lehető legtöbb számjegyből állnak.

Egy n pozitív természetes szám és a nulla legnagyobb közös osztója az n szám.

Hány ilyen szám van? **7 pont**