Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2022/2023-as tanév

Kezdők I–II. kategória 2. és III. kategória 1. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely csak az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyeket tartalmazza, ezek mindegyike előfordul benne legalább egyszer, és teljesül rá, hogy bármely két szomszédos számjegye közül az egyik osztója a másiknak? **6 pont**

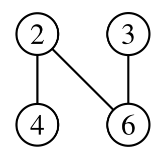
Megoldás. A keresett legkisebb számban biztosan nem állnak egymás mellett azonos számjegyek, mert ezeket le lehet cserélni egyetlen számjegyre (arra, ami ismétlődik), így egy kisebb, a feltételeknek szintén megfelelő számot kapunk. Az 5, illetve a 7 mellé emiatt csak az 1 (önmaga az ismétlődés elkerülése miatt nem) kerülhet, ezért ez a szám nem lehet 7-jegyű, mert az 1-esből legalább kettőnek kell lennie. 1 pont

Keressünk alkalmas számot azon 8-jegyű számok között, amelyek az 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 számjegyekből állnak. Ha találunk ilyet, akkor közülük a legkisebb a megoldás, és készen vagyunk.

Mivel csak két 1-es van, ezért az 5-ösnek és a 7-esnek a szám elején vagy végén kell állnia vagy együtt ($\ast\ast\ast\ast 1517$ vagy $\ast\ast\ast\ast 1715$ vagy $5171\ast\ast\ast\ast$ vagy $7151\ast\ast\ast\ast$ elrendezésben), vagy külön-külön ($51\ast\ast\ast\ast 17$ vagy $71\ast\ast\ast\ast 15$ elrendezésben). 1 pont

A $\ast\ast\ast\ast$ helyére kell berakni a 2, 3, 4 és 6 számjegyeket.

Vizsgáljuk meg, hogy ezen négy számnak a többi közül melyik lehet a szomszédja. Ha egy gráf csúcsaira írjuk ezeket a számokat, és akkor kötjük össze éllel őket, ha az egyik osztója a másiknak, akkor a mellékelt ábrát kapjuk. Ebből leolvasható, hogy a számjegyek 4263 vagy fordított, 3624 sorrendben követhetik egymást. (Természetesen bármilyen más indoklás elfogadható.) 1 pont



Ha az 5 és a 7 a szám különböző szélén van, abból az 5-össel kezdődő a kisebb: $51\ast\ast\ast\ast 17$. Az ezzel kapható legkisebb szám az 51362417. 1 pont

Ha az 5 és a 7 a szám ugyanazon szélén van, akkor úgy kapjuk a lehető legkisebbet, ha a végén áll 1517 sorrendben: $\ast\ast\ast\ast 1517$. Az ezzel kapható legkisebb szám a 36241517. 1 pont

A talált számok közül ez utóbbi a kisebb, tehát a keresett szám a 36241517. 1 pont

Összesen: **6 pont**

Megjegyzés. Nem csak akkor adható meg egy adott eset vizsgálatáért a pont, ha a diák leírja az adott esethez tartozó lehetséges számot (számokat), hanem akkor is, ha az adott esetet megvizsgálja, és helyesen és megindokolva kizárja, hogy ez adja a legkisebb megfelelő számot. (Például ha először a 36241517 számot adó esetet vizsgálja, akkor a többi eset lezárható azzal, hogy az 5-tel vagy 7-tel kezdődő számok ennél biztosan nagyobbak lesznek.)

2. Mely x, y valós számokra teljesül, hogy $\left(x^2+6x+10\right)\left(4y^2-4y+5\right)=4$? **6 pont**

Megoldás. Az egyenlet átírva: $\left(x^2+6x+10\right)\left(4y^2-4y+5\right)=[(x+3)^2+1][(2y-1)^2+4]=4$. 1 pont
Mivel $(x+3)^2+1\geqslant 1$; $(2y-1)^2+4\geqslant 4$, 1 pont
ezért $\left[(x+3)^2+1\right]\left[(2y-1)^2+4\right]\geqslant 4$. 1 pont
Ha $\left[(x+3)^2+1\right]\left[(2y-1)^2+4\right]=4$, akkor $(x+3)^2+1=1$ és $(2y-1)^2+4=4$, ami $x=-3$ és $y=\dfrac{1}{2}$ esetén lehetséges. 1 pont
Ezek kielégítik az eredeti egyenletet. 1 pont
Tehát $x=-3$ és $y=\dfrac{1}{2}$. 1 pont
Összesen: **6 pont**

Megjegyzés. Az eredmény puszta közlése 1 pont.

3. Adott a síkon 65 pont. Ha ezeket páronként összekötjük, akkor 2023 különböző egyenest kapunk. Bizonyítsuk be, hogy az egyenesek között biztosan lesz olyan, amelyre legalább 4 pont illeszkedik. **8 pont**

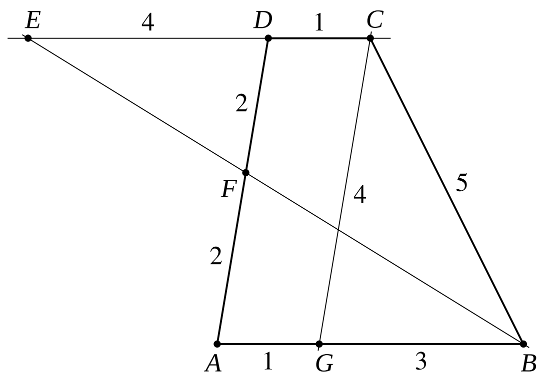
Megoldás. Ha a kijelölt pontok közül semelyik 3 nem esik egy egyenesre, akkor azok

$$\frac{65\cdot 64}{2}=2080$$

egyenest határoznak meg. 2 pont
Mivel a feladat feltétele alapján a kapott egyenesek száma ennél kevesebb, ezért az egyenesek között biztosan van olyan is, amely legalább 3 pontot tartalmaz. 2 pont
Ha a pontok között nincs egy egyenesre illeszkedő pontnégyes, és a 3 pontot tartalmazó egyenesek száma k $(k\in\mathbb{N}^+)$, akkor az egymástól különböző egyenesek száma $2080-2k=2(1040-k)$, mivel a kollineáris ponthármasok 2-2-vel csökkentik a maximumhoz képest az egyenesek számát. 2 pont
$2(1040-k)$ páros szám, így nem lehet 2023-mal egyenlő. 1 pont
Ez viszont azt jelenti, hogy az egyenesek között van olyan is, amelyre legalább 4 pont illeszkedik. Ezzel az állítást beláttuk. 1 pont
Összesen: **8 pont**

4. Az $ABCD$ trapéz szárainak hossza $AD = 4$ és $BC = 5$ egység. DC a rövidebb alap, és 1 egység hosszú. A B csúcsnál lévő belső szög szögfelezője az AD szárat a felezőpontjában metszi. Mekkora a trapéz területe? **10 pont**

Megoldás. Hosszabbítsuk meg az ABC szög szögfelezőjét a CD egyeneséig, amellyel vett metszéspontját nevezzük E-nek. 1 pont



Az ECB háromszög EB-n fekvő két szöge egyenlő, mivel mindkettő egyenlő az ABE szöggel; EBC a szögfelezés miatt, BEC pedig a váltószöge, 1 pont

ezért $EC = BC = 5$ egység. 1 pont

Ebből adódik, hogy $ED = EC - DC = 5 - 1 = 4$. (Mivel E a CD félegyenesen van.) 1 pont

Az EDF és az ABF háromszögek egybevágók, mert szögeik egyenlők és $DF = AF$, ezért $AB = 4$ egység. 1 pont

Húzzunk párhuzamost C-n keresztül AD-vel, amely G-ben metszi az AB oldalt. 1 pont

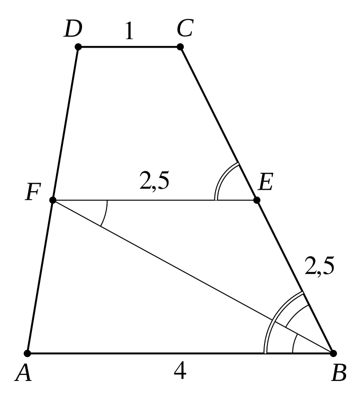
$AG = 1$, $GB = 3$ egység, 1 pont

tehát a BCG háromszög oldalai 3, 4, és 5 egység, tehát derékszögű, ezért CG és AD egyben a trapéz magassága. 2 pont

A trapéz területe: $\dfrac{(4+1)\cdot 4}{2} = 10$ területegység. 1 pont

Összesen: **10 pont**

Megjegyzés az első 5 ponthoz: Az $AB = 4$ egység másképpen is megkapható. Rajzoljuk be a trapéz FE középvonalát. Innen $ABF\sphericalangle = BFE\sphericalangle$, mert váltószögek, $ABF\sphericalangle = FBE\sphericalangle$, mert BF szögfelező, ezért $BFE\sphericalangle = FBE\sphericalangle$. Az FBE háromszög tehát egyenlő szárú, így $FE = EB = 2{,}5$ egység. Innen $AB = 4$ egység adódik (4 és 1 számtani közepe 2,5).



5. Egy 6×6-os tábla mindegyik mezőjét a piros, kék és zöld színek valamelyikével kiszíneztük. Két mezőt *fánkszomszédosnak* nevezünk, ha van közös oldalélük, vagy pedig egy sor vagy oszlop két átellenes végén helyezkednek el. A mezőkre egy-egy számot írunk az alábbi szabályok szerint:

- Ha a mező piros, akkor a felírt számot úgy kapjuk, hogy összeadjuk a mező kék fánkszomszédjai darabszámának kétszeresét és a mező zöld fánkszomszédjai darabszámának háromszorosát.
- Ha a mező kék, akkor a felírt számot úgy kapjuk, hogy összeadjuk a mező zöld fánkszomszédjai darabszámának kétszeresét és a mező piros fánkszomszédjai darabszámának háromszorosát.
- Ha a mező zöld, akkor a felírt számot úgy kapjuk, hogy összeadjuk a mező piros fánkszomszédjai darabszámának kétszeresét és a mező kék fánkszomszédjai darabszámának háromszorosát.

Mi a táblára felírt számok összegének lehetséges maximuma? **10 pont**

Megoldás. Nem fánkszomszédos mezők színe nem befolyásolja a táblára írt számokat. 1 pont
Egy mező vele azonos színű fánkszomszédai száma nem járul hozzá a mezőre írt szám növeléséhez. Vagyis két azonos színű fánkszomszédos mező nem növeli a táblára írt számok összegét. 1 pont
Ha viszont két fánkszomszédos mező különböző színű, akkor – a leírt szabályok alapján – az egyiknél kétszer, a másiknál pedig háromszor kell számítani őket. 1 pont
Ezért a táblára felírt számok összege a *különböző* színű fánkszomszédos mezőpárok számának ötszöröse. 2 pont

Mivel mindegyik mezőnek négy fánkszomszédja van, ezért az ilyen párok száma $\dfrac{6^2 \cdot 4}{2} = 72$, 2 pont
tehát az összeg nem lehet több, mint $5 \cdot 72 = 360$. 1 pont
Létezik olyan konstrukció, amikor az összes fánkszomszédos kapcsolatban álló mezőpár különböző színű: például ha sakktáblaszerűen, váltott színnel színezzük a szomszédos mezőket. Tehát a keresett maximum 360.
(Bármely egyéb, a feltételnek megfelelő konstrukció elfogadható. Hibás konstrukcióért azonban nem jár pont.) 2 pont
Összesen: **10 pont**