



2017 Április 8., Szombat

1. Feladat Az $ABCD$ konvex négyszögben $DAB_{\angle} = BCD_{\angle} = 90^{\circ}$ és $ABC_{\angle} > CDA_{\angle}$. Legyen Q és R rendre a BC és CD szakasz egy-egy pontja, és messe a QR egyenes az AB és AD egyeneseket rendre a P és S pontokban. Tegyük fel, hogy $PQ = RS$. Jelölje M a BD szakasz felezőpontját és jelölje N a QR szakasz felezőpontját. Igazoljuk, hogy az M , N , A és C pontok egy körre illeszkednek.

2. Feladat Határozzuk meg a legkisebb pozitív egész k számot, melyhez létezik a pozitív egészeknek ($\mathbb{Z}_{>0}$) egy k színnel színezése és egy $f : \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ függvény, amely teljesíti a következő két feltételt:

(i) Minden azonos színű pozitív egész m, n esetén $f(m + n) = f(m) + f(n)$;

(ii) Léteznek olyan pozitív egész m, n számok, melyekre $f(m + n) \neq f(m) + f(n)$ teljesül.

A pozitív egészek ($\mathbb{Z}_{>0}$) egy k színnel színezése azt jelenti, hogy minden pozitív egész számot pontosan egy színnel színezünk ki a k szín közül. Az (i) és (ii) feltételekben az m, n számok nem feltétlenül különbözőek.

3. Feladat Adott 2017 egyenes a síkon, melyek közül semelyik háromnak nincsen közös metszéspontja. *Turbó*, a csiga az egyenesek közül az egyiknek valamely pontjából elindul, és ezen egyenesek mentén halad a következőképpen: addig csúszik egy egyenesen, amíg el nem érkezik az egyenes és egy másik egyenes metszéspontjába. A metszéspontban a másik egyenesen folytatja útját, mégpedig úgy, hogy felváltva kanyarodik jobbra és balra az általa elért metszéspontokban. Irányt csak metszéspontokban válthat. Lehetséges-e, hogy egy útszakaszon mind a két irányban végighalad mozgása során?