



2019. április 10., szerda

4. Feladat Legyen az ABC háromszög beírt körének középpontja I . Jelöljük az AB oldal és a B -n átmenő AI -t I -ben érintő kör B -től különböző metszéspontját P -vel. Jelöljük az AC oldal és a C -n átmenő AI -t I -ben érintő kör C -től különböző metszéspontját Q -val. Bizonyítsuk be, hogy ekkor PQ érinti az ABC háromszög beírt körét.

5. Feladat Legyen $n \geq 2$ egész szám, és legyenek a_1, a_2, \dots, a_n pozitív egész számok. Mutassuk meg, hogy léteznek b_1, b_2, \dots, b_n pozitív egész számok, amelyekre a következő három feltétel teljesül:

(A) $a_i \leq b_i$ minden $i = 1, 2, \dots, n$ -re;

(B) b_1, b_2, \dots, b_n -nek n -nel való osztási maradékai páronként különbözőek; és

(C) $b_1 + \dots + b_n \leq n \left(\frac{n-1}{2} + \left\lfloor \frac{a_1 + \dots + a_n}{n} \right\rfloor \right)$.

($\lfloor x \rfloor$ a valós szám x egészrészét jelöli, tehát a legnagyobb egész számot, ami nem nagyobb, mint x .)

6. Feladat Egy körbe Alina 2019 hűrt rajzolt, különböző végpontokkal. Egy pontot *megjelöltnek* tekintünk, ha

(i) a 4038 húr-végpont valamelyike; vagy

(ii) legalább két húr metszéspontja.

Alina minden pontot feliratoz. A 4038 pontból ami az (i) feltételnek felel meg, Alina 2019 pontot 0-val feliratoz, és a maradék 2019 pontot 1-gyel. Az (ii) feltételnek megfelelő pontokat egy tetszőleges (nem feltétlenül pozitív) egész számmal látja el.

Alina minden húron a szomszédos megjelölt pontok közötti szakaszokat vizsgálja. (Egy húr k megjelölt ponttal $k - 1$ ilyen szakaszt tartalmaz.) Minden ilyen szakaszra sárgával felírja a szakasz végpontjainak összegét és kézzel felírja a végpontok különbségének abszolút értékét.

Alina azt találja, hogy az $N + 1$ sárga felirat a $0, 1, \dots, N$ értékek mindegyikét pontosan egyszer veszi fel. Mutassuk meg, hogy legalább egy kék felirat osztható 3-mal!

(A *húr* a körvonal két különböző pontját összekötő egyenes szakasz.)