2018. július 9., hétfő

1. feladat. Legyen Γ a hegyesszögű ABC háromszög körülírt köre. D és E legyenek az AB ill. AC szakaszok olyan pontjai, amelyekre $AD = AE$. A BD és CE szakaszok felezőmerőlegesei a Γ kör rövidebb AB ill. AC íveit az F ill. G pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy a DE és FG egyenesek párhuzamosak vagy egybeesnek.

2. feladat. Határozzuk meg azokat az $n \geq 3$ egész számokat, amelyekre léteznek $a_1, a_2, \ldots, a_{n+2}$ valós számok, amelyekre $a_{n+1} = a_1$, $a_{n+2} = a_2$ és

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}$$

teljesül minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén.

3. feladat. Nevezzük *anti-Pascal háromszög*nek számoknak egy olyan, szabályos háromszög alakú elrendezését, amelyben az utolsó sorbeli számok kivételével minden szám a közvetlenül alatta lévő két szám különbségének az abszolút értékével egyenlő.

Alább látható egy példa egy olyan anti-Pascal háromszögre, amelynek 4 sora van, és 1-től 10-ig minden egész szám előfordul benne.

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 4 & & & \\ & & 2 & & 6 & & \\ & 5 & & 7 & & 1 & \\ 8 & & 3 & & 10 & & 9 \end{array}$$

Létezik-e olyan anti-Pascal háromszög, aminek 2018 sora van, és 1-től $(1 + 2 + \cdots + 2018)$-ig minden egész szám előfordul benne?

2018. július 10., kedd

4. feladat. *Hely*nek nevezzük a sík minden olyan (x, y) pontját, amelyre x és y olyan pozitív egészek, melyek mindegyike kisebb vagy egyenlő, mint 20.

Kezdetben a 400 hely midegyike szabad. Anna és Balázs felváltva zsetonokat raknak a helyekre, Anna kezd. Anna minden lépésekor egy új piros zsetont helyez egy még szabad helyre olymódon, hogy semelyik két piros zseton helyének távolsága se legyen $\sqrt{5}$-tel egyenlő. Balázs minden lépésekor egy új kék zsetont helyez egy még szabad helyre. (Egy kék zseton által elfoglalt hely távolsága bármely másik foglalt helytől tetszőleges lehet.) A játék akkor ér véget, ha valamelyik játékos nem tud lépni.

Határozzuk meg a legnagyobb K értéket, amelyre igaz az, hogy Anna biztosan el tud helyezni K darab piros zsetont, bárhogyan is játszik Balázs.

5. feladat. Legyen $a_1, a_2, \ldots$ pozitív egészeknek egy végtelen sorozata. Tegyük fel, hogy van egy olyan $N > 1$ egész, hogy minden $n \geq N$-re

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_1}$$

egész szám. Bizonyítsuk be, hogy van egy olyan M pozitív egész, hogy $a_m = a_{m+1}$ minden $m \geq M$-re.

6. feladat. Az $ABCD$ konvex négyszögre teljesül $AB \cdot CD = BC \cdot DA$. Az X pont az $ABCD$ olyan belső pontja, amelyre teljesül

$$XAB\sphericalangle = XCD\sphericalangle \quad \text{és} \quad XBC\sphericalangle = XDA\sphericalangle.$$

Bizonyítsuk be, hogy $BXA\sphericalangle + DXC\sphericalangle = 180°$.