OKÉV
Országos Közoktatási Értékelési és Vizsgaközpont

SZAKKÖZÉPISKOLA

A 2005-2006. tanévi matematika OKTV I. kategória
második forduló feladatainak megoldása

1. feladat

Oldja meg az $(x+y)+(x-y)+x\cdot y+\frac{x}{y}=363$ egyenletet, ha x és y egész számok!

10 pont

I. Megoldás:

A megoldandó egyenlet ekvivalens a

(1) $$2\cdot x+x\cdot y+\frac{x}{y}=363$$ egyenlettel.

Nyilvánvaló, hogy $y\neq 0$ (1 pont)

Mivel x, y egész számok, ezért (1) csak úgy teljesülhet, ha $\frac{x}{y}$ is egész szám.

Ebből az következik, hogy az x többszöröse y-nak, azaz

$$x=k\cdot y \qquad (k\in Z)$$ (2 pont)

Ezzel $$2\cdot k\cdot y+k\cdot y^2+k=363,$$

vagy másként

(2) $$k\cdot\left(y^2+2\cdot y+1\right)=363$$ (1 pont)

(2) bal oldalán egy egész szám és egy egész szám négyzetének szorzata áll, vagyis

(3) $$k\cdot(y+1)^2=363.$$

(3) szerint 363 osztható egy egész szám négyzetével. Mivel $363=3\cdot 11^2$, (1 pont)

ezért (3) kétféleképpen teljesülhet:

a) $$(y+1)^2=1$$

vagy

b) $$(y+1)^2=11^2$$ (1 pont)

Ha $(y+1)^2=1$, akkor y+1=1 vagy $y+1=-1$, amelyből y=0 illetve $y=-2$ következik.

Az y=0 a feltétel miatt nem lehetséges.

Az $y=-2$-ből (3) felhasználásával adódik, hogy egyrészt, k=363, másrészt $x=-726$

(1 pont)

Ha $(y+1)^2=11^2$, akkor y+1=11 vagy $y+1=-11$, tehát y=10, illetve $y=-12$.

Ekkor k=3 és ezért x=30 illetve $x=-36$ (1 pont)

A feladat megoldásai tehát az egész számokból álló számpárok halmazán:

$$x_1=-726 \quad ; \quad y_1=-2$$
$$x_2=30 \quad ; \quad y_2=10$$
$$x_3=-36 \quad ; \quad y_3=-12$$

(1 pont)

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy ezek a számpárok valóban megoldásai az egyenletnek. (1 pont)

Összesen: 10 pont

II. Megoldás:

Szorozzuk be az egyenlet mindkét oldalát y-nal! ($y \neq 0$)

Rendezés után a következőt kapjuk:

(1) $$2 \cdot x \cdot y + x \cdot y^2 + x - 363 \cdot y = 0.$$ (1 pont)

Vegyünk el (1) mindkét oldalából 363-at! Ezzel egyrészt

$$2 \cdot x \cdot y + x \cdot y^2 + x - 363 \cdot y - 363 = -363,$$ (1 pont)

másrészt

(2) $$x \cdot (y+1)^2 - 363(y+1) = -363$$ (1 pont)

(2) bal oldala szorzattá alakítható:

(3) $$(y+1) \cdot (xy + x - 363) = -363.$$

A kényelmesebb számolás érdekében (3) így is írható:

(4) $$(y+1) \cdot (363 - xy - x) = 3 \cdot 11^2$$ (1 pont)

A $3 \cdot 11^2$ számot kell két egész szám szorzatára bontani, és mivel $3 \cdot 11^2$-nek 6 pozitív osztója van, ezért a negatív osztókat is figyelembe véve 12 esetet kell megvizsgálnunk.(1 pont)

A számológép nélkül is elvégezhető számítások után az I. megoldásban kapott eseteket kapjuk. (a többiben vagy x, vagy y nem egész szám):

$$x_1 = -726 \quad ; \quad y_1 = -2$$
$$x_2 = 30 \quad ; \quad y_2 = 10$$
$$x_3 = -36 \quad ; \quad y_3 = -12$$

(4 pont)

A megoldások helyességéről ellenőrzéssel győződhetünk meg. (1 pont)

Összesen: 10 pont

2.feladat

Az ABC háromszög súlyvonalai az S pontban metszik egymást. Bizonyítsa be, hogy az

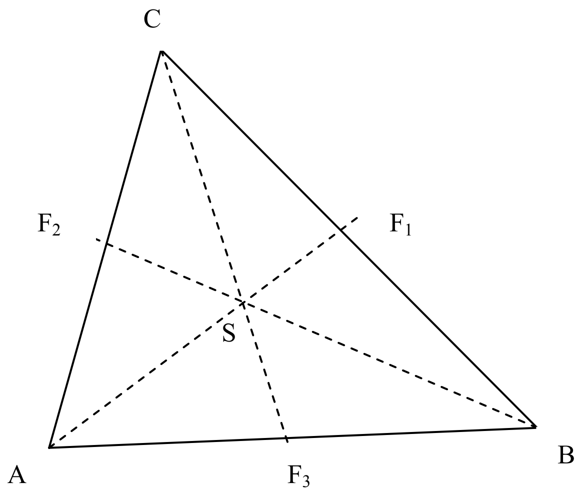
$$AB^2 + BC^2 + CA^2 = 3 \cdot \left(SA^2 + SB^2 + SC^2\right)$$

egyenlőség teljesül!

10 pont

I. Megoldás:

Jelöléseink az ábrán láthatók, az F_1, F_2 és F_3 pontok a megfelelő oldalak felezőpontjai.



A megoldásban felhasználjuk az S súlypontnak azt az ismert tulajdonságát, hogy S a megfelelő súlyvonalnak a csúcstól távolabb eső harmadoló pontja. (1 pont)

Így kapjuk, hogy

(1) $$AF_1 = SA + \frac{SA}{2} \Rightarrow \quad AF_1 = \frac{3}{2} SA$$ (1 pont)

Írjuk fel a koszinusztételt az ABF1 háromszögre! Az oldalakat a szokásos módon jelölve:

(2) $$AF^2{}_1 = c^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot c \cdot \frac{a}{2} \cdot \cos \beta$$

Felhasználjuk (1)-et és azt, hogy az ABC háromszögre felírt koszinusztételből következően:

$$\cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

így kapjuk, hogy

$$\frac{9}{4}SA^2 = c^2 + \frac{a^2}{4} - 2 \cdot c \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac},$$

ahonnan rendezés után:

(3) $$3 \cdot SA^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{3}$$ (3 pont)

Hasonlóképpen látható be, hogy egyrészt

(4) $$3 \cdot SB^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{3}$$ (2 pont)

illetve:

(5) $$3 \cdot SC^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{3}$$ (2 pont)

A (3)-(4)-(5) egyenletek megfelelő oldalainak összeadása után kapjuk, hogy

$$3 \cdot \left(SA^2 + SB^2 + SC^2\right) = a^2 + b^2 + c^2,$$

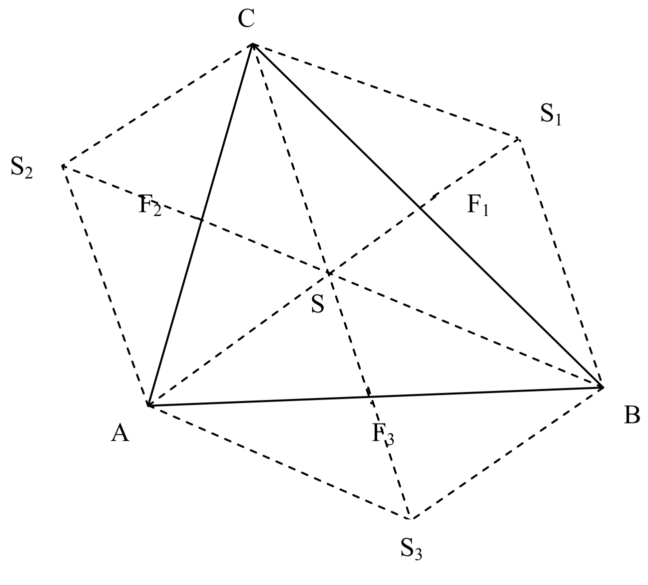
ez pedig ekvivalens a bizonyítandó állítással. (1 pont)

Összesen: 10 pont

II. Megoldás:

Ebben a megoldásban a súlypont tulajdonsága mellett felhasználjuk azt a könnyen (például a Pitagorasz – tétel segítségével) bizonyítható állítást, hogy a paralelogramma oldalainak négyzetösszege egyenlő az átlók négyzetösszegével.

Tükrözzük az 1. megoldás ábráján szereplő S súlypontot a megfelelő oldalak F_1, F_2 és F_3 oldalfelező pontjaira! Jelöléseink az ábrán láthatók.



(2 pont)

A tükrözés miatt a BS_1CS, CS_2AS, AS_3BS négyszögek parallelogrammák, ezért

$BS_1=AS_2=SC,$ $CS_1=AS_3=SB,$ $CS_2=BS_3=SA.$ (1 pont)

Az S súlypont az egyes súlyvonalak csúcsoktól távolabb eső harmadoló pontja, eszerint

$SF_1=\frac{SA}{2},$ $SF_2=\frac{SB}{2},$ $SF_3=\frac{SC}{2},$ (1 pont)

A tükrözés és a parallelogrammák tulajdonságai miatt így is teljesül, hogy

(1) $SS_1=SA,$ $SS_2=SB$ $SS_3=SC$ (1 pont)

A BC=a, CA=b és AB=c jelöléssel alkalmazzuk a parallelogrammákra vonatkozó állítást:

(2) $2\cdot SB^2+2\cdot SC^2=SA^2+a^2$

(3) $2\cdot SA^2+2\cdot SC^2=SB^2+b^2$

(4) $2\cdot SA^2+2\cdot SB^2=SC^2+c^2$ (3 pont)

A (2)-(3)-(4) egyenletek megfelelő oldalait összeadva és rendezve azt kapjuk, hogy

$$3\cdot\left(SA^2+SB^2+SC^2\right)=a^2+b^2+c^2,$$

ez pedig ekvivalens a bizonyítandó állítással. (2 pont)

Összesen: 10 pont

3. feladat

Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenlőséget, ha p (pozitív) prímszám:

$$\log_{\frac{p}{p+6-p^2}}\left(\frac{x^2}{2}-5\cdot x+13\right)\geq 1$$

10 pont

Megoldás:

Mivel p pozitív szám, és a logaritmus alapszáma csak pozitív szám lehet, ezért szükséges, hogy

(1) $$p+6-p^2>0$$

legyen

Az (1) egyenlőtlenség más alakban:

$$p^2-p-6<0,$$

azaz

(2) $$(p+2)\cdot(p-3)<0$$ (2 pont)

A feltételek miatt (2) úgy teljesülhet, ha p<3, ez pedig azt jelenti, hogy csak p=2 lehetséges.

Ekkor a logaritmus alapszáma $\frac{1}{2}$. (1 pont)

A logaritmus értelmezése miatt

$$\frac{x^2}{2}-5x+13>0,$$

amelyből

(3) $$x^2-10x+26>0$$

következik.

(3) minden valós x-re teljesül, mert a bal oldalon szereplő másodfokú kifejezés diszkriminánsa negatív. (1 pont)

Az eredeti egyenlőtlenség a fentiek alapján a következő alakba írható:

(4) $$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x^2}{2}-5x+13\right)\geq \log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2}$$ (1 pont)

(4) két oldalán a logaritmus kifejezések alapszáma 1-nél kisebb pozitív szám, ezért

$$\frac{x^2}{2}-5x+13\leq \frac{1}{2},$$

illetve

(5) $$x^2-10x+25\leq 0$$ (2 pont)

Az (5) bal oldala teljes négyzet, vagyis

(6) $$(x-5)^2\leq 0.$$

(6) Csak úgy lehetséges, ha x=5. (1 pont)

A kiinduló egyenlőtlenség egyetlen megoldása tehát a p=2 prímszám esetén adódó

x=5 valós szám.

Ellenőrizhető, hogy ez valóban megoldás, ekkor az egyenlőtlenségben az egyenlőség

esete áll fenn. (2 pont)

Összesen: 10 pont

4. feladat

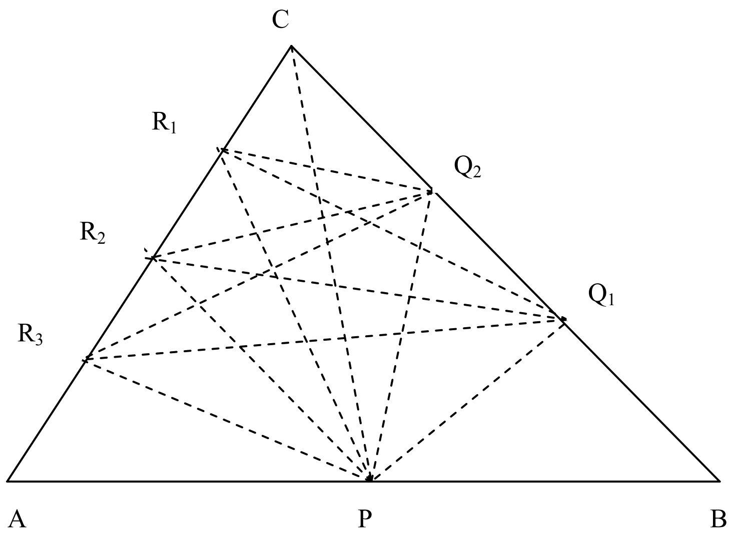
Az ABC háromszög egyik oldalát két, a másik oldalát három, a harmadik oldalát négy egyenlő részre osztottuk. Az osztópontok rendre: az AB oldalon P, a BC oldalon Q_1 és Q_2, a CA oldalon R_1, R_2, R_3.

Tekintsük az összes olyan háromszöget, amelynek mindhárom csúcsa különböző oldalon levő osztópont. Melyik háromszögnek legkisebb a területe?

10 pont

Megoldás:

Jelöléseink az ábrán láthatók.



A lehetséges háromszögek mindegyikének csúcsa a P pont és a feltételek alapján nyilvánvaló, hogy összesen hat háromszög területét kell megállapítani, még pedig: PQ_1R_1, PQ_1R_2 , PQ_1R_3 , PQ_2R_1,, PQ_2R_2 és végül a PQ_2R_3 háromszög. (1 pont)

Mindegyik háromszög területét az ABC háromszög területével fogjuk összehasonlítani.

Az összehasonlításnál felhasználjuk azt az ismert állítást, hogy ha két háromszögben egy-egy oldalhoz tartozó magasság egyenlő, akkor a háromszögek területének aránya a szóban forgó oldalak arányával egyezik meg. (1 pont)

Ennek megfelelően az ABC háromszög PC súlyvonala felezi az ABC háromszög területét, továbbá a PCR_1, PR_1R_1, PR_2R_3 és PR_3A háromszögek területe egyenlő, mivel a $CR_1=R_1R_2=R_2R_3=R_3RA$ szakaszokhoz tartozó magasságuk közös.

Az ABC háromszög területét T-vel jelölve kapjuk, hogy

(1) $$T_{APR_{1\Delta}} = \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}T = \frac{3}{8}T\,.$$

Hasonló módon látható be, hogy PBQ_1, PQ_1Q_2 és PQ_2C háromszögek területe egyenlő, ezért

(2) $$T_{PBQ_{1\Delta}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}T = \frac{1}{6}T\,.$$

A BCR_1 háromszög területe T-nek $\frac{1}{4}$ része, mivel a BCR_1 és az ABC háromszög B csúcsból induló magassága egyenlő és $CR_1 = \frac{1}{4}CA$.

Látható, hogy a CR_1Q_1 háromszög területe $\frac{2}{3}$ része a BCR_1 háromszög területének, így

(3) $$T_{Q_1CR_{1\Delta}} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}T = \frac{1}{6}T$$

Az (1)-(2)-(3) összefüggésekből kapjuk, hogy

(4) $$T_{PQ_1R_1\Delta} = \frac{7}{24}T\,.$$ (2 pont)

A területek összehasonlításának az előzőekben alkalmazott módszerét a továbbiakban is követve:

$$T_{APR_2\Delta} = \frac{1}{4}T \quad ; \quad T_{PBQ_1\Delta} = \frac{1}{6}T$$

illetve (3) alapján

$$T_{Q_1CR_2\Delta} = 2\cdot T_{Q_1CR_1\Delta} = \frac{2}{6}T\,.$$

Ezzel:

(5) $$T_{PQ_1R_2\Delta} = \frac{6}{24}T\,.$$ (1 pont)

Mivel $CR_1=AR_3$ (ahogy azt a korábbiakban láttuk), ezért

$$T_{APR_3\Delta} = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}T = \frac{1}{8}T\,,$$

$$T_{Q_1CR_3\Delta} = 3\cdot T_{Q_1CR_1\Delta} = \frac{3}{6}T$$

$$T_{PBQ_1\Delta} = \frac{1}{6}T\,,$$

így

(6) $$T_{PQ_1R_3\Delta} = \frac{5}{24}T.$$ (1 pont)

A PQ_2R_1 háromszög területének T-vel való összehasonlításához APR_1, a PBQ_2 és a Q_2CR_1 háromszögek területét fejezzük ki:

(1)-ből következően: $$T_{APR_1\Delta} = \frac{3}{8}T,$$

továbbá (2) alapján

$$T_{PBQ_2\Delta} = 2 \cdot T_{PBQ_1\Delta} = \frac{2}{6}T,$$

illetve

(3) szerint $$T_{Q_2CR_1\Delta} = \frac{1}{2}T_{Q_1CR_1\Delta} = \frac{1}{12}T\ ),$$

és innen:

(7) $$T_{PQ_2R_1\Delta} = \frac{5}{24}T.$$ (1 pont)

Az előzőekben már megállapítottuk, hogy $T_{APR_2\Delta} = \frac{1}{4}T$, $T_{PBQ_2\Delta} = \frac{2}{6}T$, és az is könnyen

látható, hogy $$T_{Q_2CR_2\Delta} = 2 \cdot T_{Q_2CR_1\Delta} = \frac{2}{12}T,$$

ezért

(8) $$T_{PQ_2R_2\Delta} = \frac{6}{24}T.$$ (1 pont)

Végül

$$T_{APR_3\Delta} = \frac{1}{3}T_{APR_1\Delta} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}T = \frac{1}{8}T,$$

$$T_{PBQ_2\Delta} = \frac{2}{6}T, \quad \textit{és} \quad T_{Q_2CR_3\Delta} = 3 \cdot T_{Q_2CR_1\Delta} = \frac{3}{12}T,$$

amiből pedig:

(9) $$T_{PQ_2R_3\Delta} = \frac{7}{24}T$$ (1 pont)

A (4)-(9) pontokban felírt összefüggésből világosan látszik, hogy a feladat feltételeinek megfelelő legkisebb területű háromszög a PQ_1R_3 és a PQ_2R_1 háromszög, ezek területeire érvényes, hogy

$$T_{PQ_1R_3\Delta} = T_{PQ_2R_1\Delta} = \frac{5}{24}T.$$ (1 pont)

Összesen: 10 pont

5. feladat

Egy kocka minden csúcsához írjuk oda az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számok valamelyikét úgy, hogy a testátlók végpontjaiba írt két-két szám összege ugyanannyi legyen. (A kocka csúcsainak minden egyes megjelölésénél mind a nyolc számot fel kell használnunk.) Hányféleképpen jelölhetjük meg az előbb ismertetett módon a kocka csúcsait, ha az elforgatással egymásba átvihető eseteket nem tekintjük különbözőnek?

10 pont

Megoldás:

A kockának négy testátlója van, így az egyes testátlók két csúcspontjában álló számok összegének

$$\frac{1+2+3+4+5+6+7+8}{4} = 9 \text{ -nek kell lennie} \qquad \text{(2 pont)}$$

Mivel az elforgatással egymásba átvihető eseteket nem tekintjük különbözőnek, ezért rögzíthetjük a kocka valamelyik csúcsánál, például az 1-et. A vele szomszédos csúcsokat lapátlók kötik össze, tehát a (2;7), a (3;6) és a (4;5) számpárokból tetszőlegesen választhatunk ezekre a helyekre egy-egy számot. Az így kiválasztott számok már egyértelműen meg fogják határozni mind a nyolc szám helyét. (2 pont)

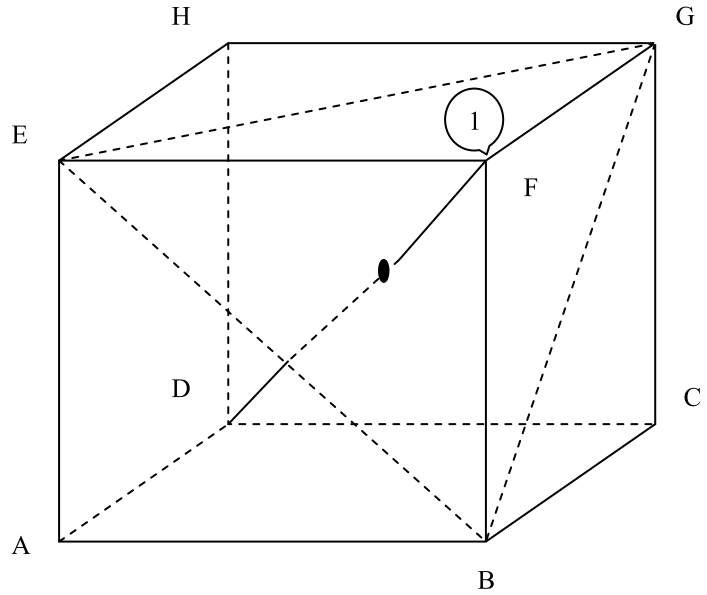
Az előbb említett kiválasztásra minden párban két lehetőségünk van (a többi kiválasztástól függetlenül), ezért

$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8 \text{ féleképpen}$$

választhatjuk ki az 1-gyel megjelölt csúcs szomszédos csúcsaiban a számokat.

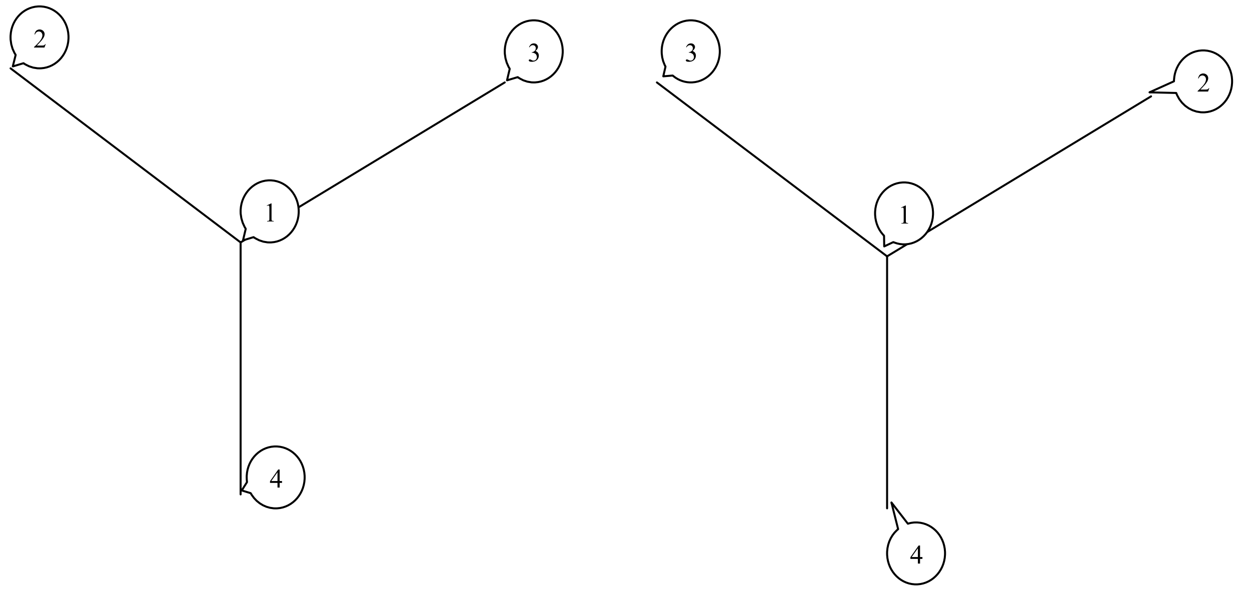
(2 pont)

Az 1-gyel megjelölt F csúcsból induló testátló körüli $120° - os$ elforgatás önmagába viszi át a kockát, hiszen a BGE háromszög a kocka lapátlóiból álló szabályos háromszög, amelynek középpontja az FD tetátló és a BGE síkjának P metszéspontja. (1. ábra)



1.ábra

Ezért egy kiválasztott szomszédos számhármasnál csak két különböző esetet kapunk, amelyekben ellenkező a körüljárás iránya. Ennek egyik lehetséges módját szemlélteti a 2. ábra.



2. ábra

(2 pont)

Így a feladatban megadott feltételek mellett összesen $8 \cdot 2 = 16$ féleképpen írhatjuk a kocka csúcsaihoz a számokat. (2 pont)

Összesen: 10 pont