



**A 2007/2008. tanévi  
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny  
második fordulójának feladatlapja MATEMATIKÁBÓL  
I. (szakközépiskolai) kategóriában**

Fontos tudnivalók:

1. A **versenyző** a kidolgozás során használt **minden papírlap jobb felső sarkába csak a kódszámot írja fel!**
2. A feladatok megoldására fordítható idő 5 (öt) óra.
3. A feladatok megoldásához bármely írásos tárgyi eszköz (szakkönyv, példatár stb.) szabadon használható, de **számológép vagy egyéb elektronikus eszköz** (pl. mobiltelefon) **nem használható!** A versenyzőknek önállóan kell dolgozniuk!
4. Ha a versenyző valamelyik feladat megoldásában **olyan eszközökre támaszkodik, amelyek nem szerepelnek kategóriája matematika könyveiben, akkor pontosan hivatkozni kell arra a forrásra, ahonnan azt merítette.** A feladatok pontos megoldását ebben az esetben is le kell írnia, és azokat a felhasznált tételeket, fogalmakat, amelyek a tananyagban nem szerepelnek, meg kell fogalmaznia, illetve meg kell határoznia. A versenybizottság csak kellően megindokolt megoldásokat fogad el. **Az eredmény pusztá közzlése nem értékelhető.** Nem fogadható el könyvből, példatárból stb. olyan feladatra történő hivatkozás sem, amely feladatnak a megoldása ott nincs kidolgozva.
5. A dolgozatokhoz **nem szükséges fogalmazványt** (píszkozatot) **készíteni**, de törekedni kell a megoldások világos, szabatos megfogalmazására és áttekinthető, olvasható leírására. **Ceruzával írt szöveg nem fogadható el. A feladatokat tetszés szerinti sorrendben** lehet megoldani, lehetőleg feladatanként új oldalon kezdve.
6. A dolgozatok elbírálásának megkönnyítése céljából **kérjük a versenyzőket, hogy minden lapot adjanak be**, amelyen érdemleges munkát végeztek, és jól láthatóan húzzák át azt, amit munkájukból értéktelennek ítélnék. **A verseny feladatait tartalmazó lapot a versenyzők megtarthatják.**
7. Azokat a versenyzőket, **akiknek a dolgozatából kétségtelenül megállapítható az együttműködés, kizárjuk a versenyből.**

Budapest, 2008. január

Versenyzbizottság

Eredmények:

Feladatok	1.	2.	3.	4.	5.	Összesen	Javítók aláírása
Pontszám							
Pontszám							

**A VERSENYZŐ ADATAI**

A versenyző kódszáma:

A versenyző neve: ..... oszt.: .....

Az iskola neve: .....

Az iskola címe: ..... irsz. .... város

..... utca .....hsz.

Megye: .....

A felkészítő tanár(ok) neve: .....

.....

**A megoldást tartalmazó lapok sorszámozva és ezzel a lappal összetűzve küldendők be!**

**Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2007/2008**  
**Matematika I. kategória (szakközépiskolák)**

**A 2. forduló feladatai**

1. Legyen

$$f(x) = \log_2 \left( \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} \right)$$

és

$$g(x) = \frac{2^{f(x)} - 2^{-f(x)}}{2},$$

minden olyan valós  $x$ -re, amelyre a szereplő függvények értelmezhetők.

Mennyi  $g\left(\frac{\pi}{4}\right)$  pontos értéke?

2. Tekintse a

$$p(x) = (5x - 2) \cdot (2x + 4) \cdot (x - 251)$$

és a

$$q(x) = (a - b + c) \cdot x^3 + (3a + b - c) \cdot x^2 + (a + b + c) \cdot x + d$$

**polinomokat!**

Határozza meg az  $a, b, c$  és  $d$  valós számokat úgy, hogy

$$p(x) = q(x)$$

minden valós  $x$ -re teljesüljön!

3. Az  $a_n$  és  $b_n$  számsorozatok az alábbi módon definiáljuk:

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

és

$$b_n = n \cdot a_n - a_1 - a_2 - \dots - a_{n-1}.$$

Határozza meg  $b_{2008}$  értékét!

4. Az  $ABC$  hegyesszögű háromszög  $AB$  oldala, mint átmérő fölé rajzolt kör a  $BC$  szakaszt a  $P$ , az  $AC$  szakaszt a  $Q$  pontban metszi. Legyenek a  $P$  és a  $Q$  pontokból az  $AB$ -re bocsátott merőlegesek talppontjai  $X$  és  $Y$  !  
Bizonyítsa be, hogy

$$\frac{PX}{QY} = \frac{b^2 \cdot (a^2 + c^2 - b^2)}{a^2 \cdot (b^2 + c^2 - a^2)},$$

ahol  $a, b, c$  az  $ABC$  háromszög oldalhosszait jelentik!

5. Oldja meg az egész számok halmazán a következő egyenletet, ha  $p$  pozitív prímszám:

$$\sqrt{x^2 - 2x - 3 - p^2} + \sqrt{x^2 - 2x - 3 + p^2} = p^2 \quad !$$