Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2008/2009
Matematika I. kategória

A 2. forduló feladatainak megoldása

1. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\log_4(\log_8 x) = \log_8(\log_4 x)$$

egyenletet!

Megoldás:

a logaritmus értelmezése miatt $x > 0$, valamint $\log_8 x > 0$ és $\log_4 x > 0$. (1 pont)

A fenti egyenlőtlenségekből az $f(x) = \log_8 x$ és a $g(x) = \log_4 x$ függvények szigorúan monoton növekvő tulajdonsága miatt $x > 1$ következik. (1 pont)

A $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$ azonosság alapján az egyenlet mindkét oldalát átalakítjuk:

(1) $$\frac{\log_2(\log_8 x)}{\log_2 4} = \frac{\log_2(\log_4 x)}{\log_2 8}.$$ (1 pont)

A $\log_2 4 = 2$ és a $\log_2 8 = 3$ értékeket (1)-be írva és rendezve azt kapjuk, hogy:

(2) $$3 \cdot \log_2(\log_8 x) = 2 \cdot \log_2(\log_4 x).$$ (1 pont)

Alkalmazhatjuk (2) mindkét oldalán a $k \cdot \log_a x = \log_a x^k$ azonosságot, ezzel:

(3) $$\log_2(\log_8 x)^3 = \log_2(\log_4 x)^2.$$ (1 pont)

A 2-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton (vagy kölcsönösen egyértelmű) tulajdonsága miatt (3)-ból

(4) $$(\log_8 x)^3 = (\log_4 x)^2$$

következik. (1 pont)

A (4) összefüggésben ismét alkalmazhatjuk a $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$ azonosságot, ebből

$$\left(\frac{\log_2 x}{\log_2 8}\right)^3 = \left(\frac{\log_2 x}{\log_2 4}\right)^2,$$

majd figyelembe véve a már használt $\log_2 4 = 2$ és a $\log_2 8 = 3$ értékeket,

(5) $$\frac{(\log_2 x)^3}{27} = \frac{(\log_2 x)^2}{4}$$

adódik. (1 pont)

Az $x > 1$ feltétel miatt $\log_2 x \neq 0$, ezért az (5) egyenlet mindkét oldalát oszthatjuk a $(\log_2 x)^2$ kifejezéssel, ebből

$$\frac{\log_2 x}{27} = \frac{1}{4},$$

illetve

(6) $$\log_2 x = \frac{27}{4}$$

következik. (1 pont)

A logaritmus definíciója alapján a (6) egyenlet megoldása

$$x = 2^{\frac{27}{4}}.$$ (1 pont)

Az $x = 2^{\frac{27}{4}}$ valós szám megfelel az $x > 1$ feltételnek, és ekvivalens átalakításokat végeztünk, tehát ez valóban megoldása a kiinduló egyenletnek. <u>(1 pont)*</u>

Összesen: 10 pont

*Megjegyzés:

Az ellenőrzés számolással is elvégezhető:

Baloldal:

$$\log_4 \log_8 2^{\frac{27}{4}} = \log_4 \log_8 8^{\frac{9}{4}} = \log_4 \frac{9}{4} = \log_4 2{,}25 = \frac{\log_2 2{,}25}{2} = \log_2 \sqrt{2{,}25} = \log_2 1{,}5.$$

Jobboldal:

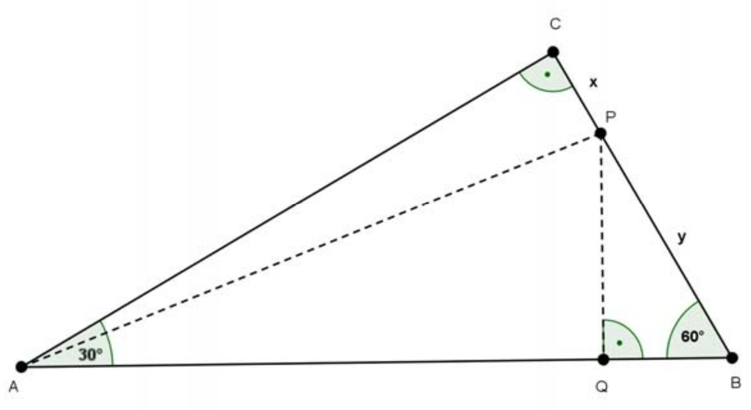
$$\log_8 \log_4 2^{\frac{27}{4}} = \log_8 \log_4 4^{\frac{13{,}5}{4}} = \log_8 \frac{13{,}5}{4} = \log_8 3{,}375 = \frac{\log_2 3{,}375}{3} = \log_2 \sqrt[3]{3{,}375} = \log_2 1{,}5.$$

Mivel a bal- és jobboldal helyettesítési értéke egyenlő, ez az x gyök.

2. **Az ABC derékszögű háromszögben az A csúcsnál levő belső szög $30°$. A BC befogóra illeszkedő P pontból az AB átfogóra rajzolt merőleges talppontja legyen Q.**

Határozza meg a $\frac{BP}{PC}$ arány értékét, ha a BPQ és a CPA háromszögek területei egyenlők!

<u>**Megoldás:**</u> jelöléseink az 1. ábrán láthatók.



1. ábra

Az ABC háromszög hegyesszögei: a feltétel alapján $BAC\angle = 30°$, emiatt $ABC\angle = 60°$.
Ebből az is következik, hogy a BPQ háromszög hegyesszögeinek nagysága:

$$QBP\angle = ABC\angle = 60^0,$$
$$QPB\angle = 30^0. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ismeretes, hogy azokban a derékszögű háromszögekben, amelyekben a hegyesszögek nagysága 30^0 és 60^0, az átfogó hossza kétszerese a rövidebb befogó hosszának, ezért az 1. ábra jelöléseivel:

(1) $$AB = 2\cdot(x+y),$$

illetve

(2) $$y = 2BQ \Rightarrow BQ = \frac{y}{2}. \qquad \text{(1 pont)*}$$

Az ABC és BPQ háromszögekben (például a Pitagorasz tétellel számolva):

(3) $$AC = (x+y)\cdot\sqrt{3},$$

illetve

(4) $$PQ = \frac{y}{2}\cdot\sqrt{3}. \qquad \text{(1 pont)*}$$

A CPA háromszög területe

$$T_{CPA_\triangledown} = \frac{CP \cdot AC}{2},$$

$$T_{CPA_\triangledown} = \frac{x \cdot (x+y) \cdot \sqrt{3}}{2},$$

a BPQ háromszög területe pedig

$$T_{BPQ_\triangledown} = \frac{PQ \cdot BQ}{2},$$

$$T_{BPQ_\triangledown} = \frac{y^2 \cdot \sqrt{3}}{8}.$$

A két terület a feltételek szerint egyenlő, ezért

(5) $$\frac{x \cdot (x+y) \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{y^2 \cdot \sqrt{3}}{8}.$$ (2 pont)

Az (5) egyenletből a műveletek elvégzése, egyszerűsítés és 0-ra rendezés után az

(6) $$y^2 - 4xy - 4x^2 = 0$$

egyenletet kapjuk. (1 pont)

A (6) egyenletben mindkét oldalt oszthatjuk a nyilvánvalóan pozitív x^2-tel, amelyből az

$$\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 4 \cdot \frac{y}{x} - 4 = 0,$$

illetve a $z = \frac{y}{x}$ helyettesítés bevezetése után a

(7) $$z^2 - 4z - 4 = 0$$

egyenlet következik. (1 pont)

A (7) egyenlet megoldásai

$$z_1 = 2 + 2 \cdot \sqrt{2} \text{ és } z_2 = 2 - 2 \cdot \sqrt{2},$$

azaz:

$$\frac{y_1}{x_1} = 2 + 2\sqrt{2} \text{ és } \frac{y_2}{x_2} = 2 - 2\sqrt{2}.$$ (1 pont)

Jelöléseink szerint

$$\frac{BP}{PC} = \frac{y}{x},$$

ezért a feladat megoldása:

$$\frac{BP}{PC} = \frac{y_1}{x_1} = 2 + 2 \cdot \sqrt{2}.$$ (1 pont)

A $\frac{BP}{PC} = \frac{y_2}{x_2} = 2 - 2 \cdot \sqrt{2}$ nyilván nem megoldás, hiszen $2 - 2 \cdot \sqrt{2}$ negatív. (1 pont)

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

Természetesen, ha az (1), (2), (3), (4)-hez a versenyző más úton jut el (például trigonometrikus számolással), akkor is megkapja az (1)*, (1)* pontokat.

3. Egy fiókban n darab füzet van, közülük néhány négyzetrácsos, a többi vonalas. Egymás után véletlenszerűen kiveszünk kettőt. Egy másik fiókban ugyancsak n darab füzet van, de kétszer annyi közöttük a négyzetrácsos, mint az előzőben. Ebből a fiókból is kiveszünk véletlenszerűen kettőt. Annak a valószínűsége, hogy a másodikból két négyzetrácsosat veszünk ki, ötször annyi, mint, annak, hogy az első fiókból veszünk ki két négyzetrácsosat. Hány négyzetrácsos füzet van az egyes fiókokban?

Megoldás:

Jelöljük k -val az első fiókban levő négyzetrácsos füzetek számát, így a második fiókban $2k$ darab négyzetrácsos füzet van.

k-ra és n-re a következő feltételek teljesülnek:

$$k \le n,$$
$$2k \le n,$$
$$k \ge 2,$$
$$2k \ge 2.$$

Ezekből következik, hogy

$$2 \le k \le \frac{n}{2},$$

továbbá

$$n \ge 4.$$ (1 pont)

A valószínűség klasszikus definíciója szerint egy esemény valószínűségét úgy kapjuk meg, hogy az esemény szempontjából kedvező esetek számát osztjuk az összes lehetséges eset számával. (1 pont)*

A két négyzetrácsos füzet kiválasztása szempontjából kedvező esetnek számít az, ha a két füzetet a négyzetrácsosak közül választjuk (a sorrendre tekintettel nem lévén), ezért az első fiókból történő választáskor a kedvező esetek száma:

(1) $$k_1 = \binom{k}{2} = \frac{k \cdot (k-1)}{2},$$

a második fiókból való választáskor

(2) $$k_2 = \binom{2k}{2} = \frac{(2k-1) \cdot 2k}{2},$$

mivel ott $2k$ darab négyzetrácsos füzet van. (1 pont)

Mivel mindkét fiókban n darab füzet van, ezért az összes lehetséges választás mindkét alkalommal:

(3) $$N=\binom{n}{2}=\frac{n\cdot(n-1)}{2}.$$ (1 pont)

Jelölje P_1, illetve P_2 annak a valószínűségét, hogy az első, illetve a második fiókból két négyzetrácsos füzetet választunk ki. Ekkor a definíciónak megfelelően a fenti (1), (2), (3) részeredményeket felhasználva (2-vel való egyszerűsítés után):

(4) $$P_1=\frac{k_1}{N}=\frac{k\cdot(k-1)}{n\cdot(n-1)},$$

illetve

(5) $$P_2=\frac{k_2}{N}=\frac{2k\cdot(2k-1)}{n\cdot(n-1)}.$$ (1 pont)

Mivel $k\geq 2$, és $n\geq 4$, ezért nyilvánvaló, hogy a szereplő törtek mindegyike értelmezett, és egyike sem 0. (1 pont)

A feladat feltétele szerint:

$$\frac{P_2}{P_1}=5,$$

ezért (4) és (5) felhasználásával

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{\frac{2k\cdot(2k-1)}{n\cdot(n-1)}}{\frac{k\cdot(k-1)}{n\cdot(n-1)}}=5,$$ (1 pont)

amelyből az egyszerűsítés és a műveletek elvégzése után

$$k=3$$

következik. (1 pont)

Ez azt jelenti, hogy az első fiókban 3 darab négyzetrácsos, a másodikban 6 darab négyzetrácsos füzet van. (1 pont)

Ellenőrzés:

$$P_1=\frac{3\cdot 2}{N}=\frac{6}{N}$$

$$P_2=\frac{6\cdot 5}{N}=\frac{30}{N}$$

$$\frac{P_2}{P_1}=\frac{30}{N}:\frac{6}{N}=5.$$ (1 pont)

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

A * pontot akkor is kapja meg a versenyző, ha szöveggel nem írja le, de jól használja a definíciót.

4. Hófehérke, Hamupipőke és Csipkerózsika a mesebeli tisztáson találkoznak. Hófehérke kosarában almák, Hamupipőke kosarában körték, Csipkerózsika kosarában barackok vannak. Minden kosárban 100-nál kevesebb gyümölcs van. Hófehérke almáinak egy kilenced részét Hamupipőkének adja, másik egy kilenced részét Csipkerózsikának. Ekkor Hamupipőke a másik két mesehős mindegyikének odaadja a körtéinek egy nyolcad - egy nyolcad részét. Csipkerózsika rövid gondolkodás után azt mondja:
„én mindkettőtöknek odaadom a barackjaim egy hatod - egy hatod részét, mert akkor mindhármunknak ugyanannyi gyümölcs lesz a kosarában."
Melyiküknek hány gyümölcse volt eredetileg, és mennyit adtak egymásnak, ha sem átadáskor, sem azután, egyikük sem darabolta a gyümölcsöket?
Mennyi lett a végén a kosaraikban levő gyümölcsök száma?

<u>Megoldás:</u>

Legyen Hófehérke almáinak száma a, Hamupipőke körtéinek száma k, végül Csipkerózsika barackjainak száma b, ahol $a<100$, $k<100$, $b<100$. (1 pont)

Mikor Hófehérke almáinak egy kilenced részét Hamupipőkének adja, másik egy kilenced részét pedig Csipkerózsikának, akkor Hófehérke kosarában $\frac{7}{9}a$ darab alma marad, Hamupipőke és Csipkerózsika kosarában egyaránt $\frac{1}{9}a$ - $\frac{1}{9}a$ darab alma lesz. Ez azt is maga után vonja, hogy

$$9 \mid a.$$

Mikor Hamupipőke a körtéiből egy nyolcad-egy nyolcad részt ad Hófehérkének és Csipkerózsikának, akkor Hamupipőke kosarában $\frac{6}{8}k$ darab körte marad, míg Hófehérke és Csipkerózsika kosarában egyformán $\frac{1}{8}k$ - $\frac{1}{8}k$ darab körte lesz, ahol

$$8 \mid k.$$

Végül, mikor Csipkerózsika a barackjainak egy hatod-egy hatod részét adja Hófehérkének és Hamupipőkének, akkor Csipkerózsika kosarában $\frac{4}{6}b$ darab barack marad, a másik két mesehős kosarában egyaránt $\frac{1}{6}b$ - $\frac{1}{6}b$ darab barack kerül, és

$$6 \mid b.$$ (2 pont)

A feltételek szerint ezután Hófehérke, Hamupipőke és Csipkerózsika kosarában egyenlő számú gyümölcs lesz.

Jelölje ezt az egyforma gyümölcsmennyiséget N !

A gyümölcsök elosztása után Hófehérke, Hamupipőke és Csipkerózsika kosarában levő gyümölcsök számára felírhatók a következő egyenletek:

(1) $$N = \frac{7}{9}a + \frac{1}{8}k + \frac{1}{6}b,$$

(2) $$N = \frac{1}{9}a + \frac{6}{8}k + \frac{1}{6}b,$$

(3) $$N = \frac{1}{9}a + \frac{1}{8}k + \frac{4}{6}b,$$

ahol

(4) $$9 \mid a \text{ és } 8 \mid k \text{ és } 6 \mid b.$$ (1 pont)

Oldjuk meg ezt az egyenletrendszert: a, b, k-t az N paraméterrel kifejezve:

$$a = \frac{15}{17} \cdot N,$$

$$k = \frac{16}{17} \cdot N,$$

$$b = \frac{20}{17} \cdot N.$$ (2 pont)

Nyilvánvaló, hogy *a, k, b, N* pozitív egészek, és mivel

$$(16,17) = 1; \quad (15,17) = 1; \quad (20,17) = 1,$$

ezért kell, hogy

$$N = 17n$$

alakú legyen, de akkor

$$a = 15 \cdot n,$$

$$k = 16 \cdot n,$$

$$b = 20 \cdot n.$$ (1 pont)

Mivel $b = 20 \cdot n$, és $b < 100$, ezért

$$n < 5 \qquad .$$

Továbbá (4) alapján tudjuk, hogy $6 \mid b$, amiből következik, hogy $3 \mid b$, és 3 nem osztja 20-at, ezért csak

$$n = 3$$

jöhet szóba. Ez megfelel a többi feltételnek is. (2 pont)

Tehát a megoldás:

	Eredetileg	1. átadás	2. átadás	3. átadás	Végső
Hófehérke	45	-10	+6	+10	51
Hamupipőke	48	+5	-12	+10	51
Csipkerózsika	60	+5	+6	-20	51

(1 pont)*

Összesen 10 pont

Megjegyzés:

Természetesen a táblázat helyett szöveges válasz is adható:

Kezdetben Hófehérke kosarában $a = 45$ darab alma,

Hamupipőke kosarában $k = 48$ darab körte és

Csipkerózsika kosarában $b = 60$ darab barack volt.

Hófehérke az almáiból 5-5 darabot,

Hamupipőke a körtéiből 6-6 darabot,

végül Csipkerózsika a barackjaiból 10-10 darabot adott a másik két mesehősnek.

A gyümölcsök elosztása után Hófehérke, Hamupipőke és Csipkerózsika kosarában egyaránt 51 darab gyümölcs lett. (1 pont)

Összesen: 10 pont

5. Oldja meg a valós (x, y) számpárok halmazán az

$$(x+y+2009)^2 = 2\cdot(xy+2x+2008)\cdot(-x+y-xy+1)$$

egyenletet!

__Megoldás:__

Vezessük be az egyenlet jobb oldalán szereplő szorzat tényezőire a következő jelöléseket:

(1) $$xy+2x+2008=a\,,$$

és

(2) $$-x+y-xy+1=b\,.$$ (1 pont)

Ekkor (1) és (2) megfelelő oldalainak összeadásával:

(3) $$a+b=x+y+2009\,.$$ (1 pont)

Az eredeti egyenlet (1), (2) és (3) figyelembevételével:

(4) $$(a+b)^2 = 2\cdot a\cdot b$$

alakú lesz. . (1 pont)

(4)-ben elvégezve a műveleteket, rendezés után az

(5) $$a^2+b^2=0$$

egyenletet kapjuk.

(5) csak úgy állhat fenn, ha $a=0$ és $b=0$ egyszerre igaz, vagyis ha teljesül az

(6) $$xy+2x+2008=0$$

és

(7) $$-x+y-xy+1=0$$

egyenletek mindegyike. 2 pont)

Ekkor $a=0$ és $b=0$ miatt $a+b$ is 0, vagyis (3) alapján

$$x+y+2009=0\,,$$

amelyből például az y-t kifejezhetjük:

(8) $$y=-x-2009\,.$$ (1 pont)

(8)-at (6)-ba helyettesítve

$$x \cdot (-x - 2009) + 2x + 2008 = 0,$$

majd a műveletek elvégzése után

(9) $$x^2 + 2007x - 2008 = 0.$$

A (9) egyenlet gyökei

$$x_1 = 1 \quad \text{és } x_2 = -2008,$$

ezekből (8) felhasználásával

$$y_1 = -2010 \text{ és } y_2 = -1.$$ (2 pont)

Az $(x + y + 2009)^2 = 2 \cdot (xy + 2x + 2008) \cdot (-x + y - xy + 1)$ egyenlet megoldásai tehát az

$$x_1 = 1;\ y_1 = -2010,$$

és az

$$x_2 = -2008;\ y_2 = -1$$

valós számpárok. (1 pont

A megoldások helyességéről az eredeti egyenletbe történő helyettesítéssel meggyőződhetünk. (1 pont)

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

Ha $(-x + y - xy + 1) = (1 - x)(y + 1)$-ből $x = 1$ vagy $y = -1$-re következtet, és nem látja be, hogy több megoldás nincs, akkor maximum 2 pontot kaphat.