Az 1. forduló feladatainak megoldása (Szakközépiskola)

1. Melyek azok az $m \in Z$ számok, amelyekre az

$$(m-2)\cdot x^2 - 2mx - 1 = 0$$

egyenletnek legfeljebb egy, az

$$m \cdot x^2 + 3mx - 4 = 0$$

egyenletnek legalább egy valós gyöke van?

Megoldás

a) Ha $m = 2$, akkor az

$$(m-2)\cdot x^2 - 2mx - 1 = 0$$

egyenlet elsőfokú, és $m = 2$ behelyettesítésével

$$-4x - 1 = 0,$$

azaz

$$x_1 = -\frac{1}{4}.$$

Ekkor teljesül az a feltétel, hogy az $(m-2)\cdot x^2 - 2mx - 1 = 0$ egyenletnek legfeljebb egy valós gyöke van.

Az $m = 2$ érték mellett az $m \cdot x^2 + 3mx - 4 = 0$ egyenletből behelyettesítés és egyszerűsítés után

$$x^2 + 3x - 2 = 0$$

adódik, ennek az egyenletnek két valós megoldása van, mégpedig

$$x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2} \text{ és } x_3 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}.$$

Teljesül tehát az a feltétel is, hogy az $m \cdot x^2 + 3mx - 4 = 0$ egyenletnek legalább egy valós gyöke van. 1 pont

Ebből következik, hogy $m = 2$ a feladat egyik megoldása. 1 pont

b) Ha $m \neq 2$, de $m = 0$, akkor ennek behelyettesítésekor az $m \cdot x^2 + 3mx - 4 = 0$ egyenletben a két oldal nem egyenlő, ezért m nem lehet 0. Ez azt is jelenti, hogy az $m \cdot x^2 + 3mx - 4 = 0$ egyenlet csak másodfokú lehet. 1 pont

Teljesülnie kell annak a feltételnek, hogy az $m \cdot x^2 + 3mx - 4 = 0$ másodfokú egyenletnek legalább egy valós gyöke legyen. Ez pontosan akkor áll fenn, ha az egyenlet diszkriminánsa nem negatív, azaz

(1) $$9m^2 + 16m \geq 0.$$ 1 pont

A $9m^2 + 16m = 0$ egyenlet gyökei

$$m_1 = -\frac{16}{9} \text{ és } m_2 = 0,$$

így figyelembe véve azt is, hogy a fentiek szerint $m \neq 0$, az (1) egyenlőtlenség megoldásai a

$$\left]-\infty;-\frac{16}{9}\right] \cup \left]0;\infty\right[$$

számhalmazba tartozó egész számok. 1 pont

Ha $m \neq 2$, akkor az $(m-2)\cdot x^2 - 2mx - 1 = 0$ másodfokú egyenletnek pontosan akkor lesz legfeljebb egy valós gyöke, ha a diszkriminánsa nem pozitív, azaz, ha

$$4m^2 + 4\cdot(m-2) \leq 0,$$

amelyből rendezés után

(2) $$m^2 + m - 2 \leq 0$$

következik.

Az $m^2 + m - 2 = 0$ egyenlet gyökei

$$m_3 = -2 \text{ és } m_4 = 1,$$ 1 pont

ezért az $m \in Z$ feltétel figyelembe vételével a (2) egyenlőtlenség megoldásai a

$$[-2;1]$$

számhalmazba tartozó egész számok. 1 pont

Az (1) és (2) közös megoldása a Z halmazon:

$$m = -2, \quad m = 1 \ .$$ 1 pont

Ha $m = -2$, akkor az $(m-2)\cdot x^2 - 2mx - 1 = 0$ egyenletből a

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

egyenletet kapjuk, amelynek egyetlen gyöke $x = \frac{1}{2}$;

az $m\cdot x^2 + 3mx - 4 = 0$ egyenletből pedig

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

adódik, amelynek megoldásai $x = -1$ és $x = -2$.

A feladat feltétele tehát mindkét egyenletre teljesül.

Másrészt, ha $m = 1$, akkor az $(m-2)\cdot x^2 - 2mx - 1 = 0$ egyenletből az

$$x^2 + 2x + 1 = 0$$

egyenlethez jutunk. Ennek csak az $x = -1$ valós szám a megoldása;
az $m\cdot x^2 + 3mx - 4 = 0$ egyenletből pedig az

$$x^2 + 3x - 4 = 0$$

egyenletet kapjuk, amelynek gyökei $x = -4$ és $x = 1$,
vagyis a feladat követelménye az $m = 1$ egész számra is teljesül. 1 pont

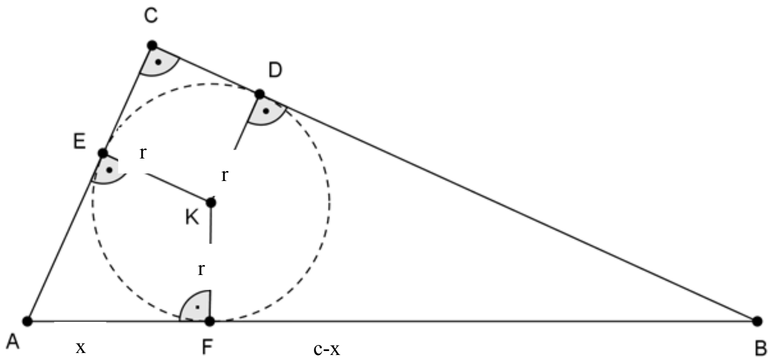
A feladat összes megoldását tehát az $m = -2$, $m = 1$, $m = 2$ egész számok adják. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Egy derékszögű háromszög átfogóját a beírt kör érintési pontja két szakaszra osztja.
Bizonyítsa be, hogy a háromszög területének számértéke egyenlő ezen két szakasz hosszának a szorzatával!

1. Megoldás

Jelöléseink a következők:



1. ábra

$$BC = a,\ CA = b,\ AB = c\ ;$$
$$KD = KE = KF = r\ ;$$
$$AF = x\ , BF = c - x\ .$$

Ezekkel a jelölésekkel azt kell bizonyítanunk, hogy

$$T_{ABC} = AF \cdot BF\ ,$$
$$T_{ABC} = x \cdot (c - x).$$ 1 pont

A körhöz egy külső pontból húzott érintőszakaszok hossza egyenlő, ezért

(1) $$CE = CD\ ,$$

továbbá

$$AE = AF = x \text{ és } BD = BF = c - x\ ,$$

valamint,

$$CE = b - AE = b - x\ ,$$
$$CD = a - BD = a - (c - x)\ ,$$ 2 pont

és (1) miatt

$$b - x = a - (c - x),$$

amiből kapjuk, hogy

(2) $$x = \frac{b + c - a}{2}\ ,$$

és

(3) $$c - x = \frac{a + c - b}{2}\ .$$ 2 pont

(2) és (3) szerint

$$AF \cdot BF = x \cdot (c - x) = \frac{b+c-a}{2} \cdot \frac{a+c-b}{2} = \frac{c+(b-a)}{2} \cdot \frac{c-(b-a)}{2}.$$ 1 pont

Elvégezve a műveleteket, azt kapjuk, hogy

(4) $$x \cdot (c - x) = \frac{c^2 - a^2 + 2ab - b^2}{4}.$$ 1 pont

Az ABC derékszögű háromszögre érvényes Pitagorasz-tétel miatt $c^2 - a^2 - b^2 = 0$, ezért a (4) összefüggés azzal egyenértékű, hogy

(5) $$x \cdot (c - x) = \frac{a \cdot b}{2}.$$ 1 pont

Mivel a $BC = a$ és $CA = b$ befogójú, derékszögű háromszög területe $\frac{a \cdot b}{2}$, ezért (5) pontosan azt jelenti, hogy

$$T_{ABC} = x \cdot (c - x),$$

ezzel a feladat állítását igazoltuk.

2 pont

Összesen: 10 pont

2. Megoldás:

Az 1. megoldás ábráját használjuk.

A $CEKD$ négyszög négyzet, mert $EK = KD$ és a szögek 90^0-osak, ezért

$$CE = CD = r.$$ 1 pont

Ebből, valamint a külső pontból körhöz húzott érintők egyenlőségéből következik, hogy:

(1) $$AE = AF = b - r,$$

illetve

(2) $$BD = BF = a - r.$$ 1 pont

Ugyanakkor

$$AF + BF = c,$$

és ezért

$$a + b - 2r = c,$$

ahonnan

(3) $$a + b = c + 2r.$$ 1 pont

Tekintsük most az $a + b$ kifejezés négyzetét!

(3) alapján ez

$$(a+b)^2 = (c+2r)^2.$$

Elvégezve a műveleteket:

(4) $$a^2+b^2+2ab=c^2+4r^2+4rc.$$ 1 pont

Mivel a Pitagorasz-tétel miatt $a^2+b^2=c^2$, ezért (4)-ből következően:

(5) $$\frac{a\cdot b}{2}=r\cdot(r+c).$$ 1 pont

Az a és b befogójú derékszögű háromszög területe éppen $\frac{a\cdot b}{2}$, így elegendő azt bizonyítani, hogy az AF és BF szakaszok hosszának szorzata $r\cdot(r+c)$. 1 pont

Az AF és BF szakaszok hosszának szorzata (1) és (2) felhasználásával:

(6) $$AF\cdot BF=(b-r)\cdot(a-r).$$

(6) jobb oldalán elvégezve a műveleteket

$$AF\cdot BF=a\cdot b-b\cdot r-a\cdot r+r^2,$$

átalakítva:

(7) $$AF\cdot BF=a\cdot b-r\cdot(a+b-r).$$ 2 pont

Helyettesítsük (7) jobb oldalán az $a+b-r$ helyére a (3)-ból következő $a+b-r=r+c$ összefüggést!

Eszerint

$$AF\cdot BF=a\cdot b-r\cdot(r+c),$$

illetve (5) miatt

$$AF\cdot BF=2\cdot r\cdot(r+c)-r\cdot(r+c),$$

vagyis

$$AF\cdot BF=r\cdot(r+c),$$

ez pedig a fentiek szerint a bizonyítandó állítással ekvivalens. 2 pont

Összesen: 10 pont

3. Melyik az a 10-es számrendszerben felírt, $\overline{xyzu}$ alakú négyjegyű szám, amelynek számjegyeire teljesülnek az

$$u + z - 4x = 1 \quad \textbf{és}$$
$$u + 10z - 2y = 14$$

feltételek?

Megoldás

Az $\overline{xyzu}$ szám négyjegyű, ezért $x \neq 0$, továbbá mivel az $x; y; z; u$ egész számok a tízes számrendszer számjegyei, ezért felírhatjuk a következő kettős egyenlőtlenségeket:

(1) $\quad 0 < x \leq 9, \quad 0 \leq y \leq 9, \quad 0 \leq z \leq 9, \quad 0 \leq u \leq 9.$ 1 pont

Az $u + z - 4x = 1$ egyenletből következik, hogy

$$u + z = 4x + 1,$$

de (1) alapján $u + z$ értéke legfeljebb 18 lehet, azaz

(2) $\quad 4x + 1 \leq 18.$

A (2) egyenlőtlenségből x lehetséges értékei: 1, 2, 3, 4. 1 pont

Az $u + 10z - 2y = 14$ egyenlet szerint

$$u + 10z = 2y + 14,$$

de ugyancsak (1) miatt

$$2y + 14 \leq 32,$$

és ezért

(3) $\quad u + 10z \leq 32.$

A (3)-ból következően z lehetséges értékei: 0, 1, 2, 3. 1 pont

A továbbiakban z és x lehetséges értékei szerint vizsgáljuk a megoldási lehetőségeket.

a) ha $z = 0$, akkor a megadott egyenletekből

$$u = 4x + 1,$$
$$\text{és } u = 2y + 14.$$

A két egyenlet ellentmondó, mert az elsőből u páratlan, a másodikból páros, tehát $z = 0$-ra nincs megoldás. 1 pont

b) ha $z = 1$, akkor ugyancsak a megadott egyenletekből

(4) $\quad u = 4x,$

(5) $\quad \text{és } u = 2y + 4.$

De tudjuk, hogy $1 \le x \le 4$, amiből itt csak $x = 1$, vagy $x = 2$ jöhet szóba (mert $u \le 9$).

b$_1$) ha $x = 1$, akkor (4)-ből $u = 4$, és (5)-ből $y = 0$.

b$_2$) ha $x = 2$, akkor (4)-ből $u = 8$, és (5)-ből $y = 2$. 2 pont

c) ha $z = 2$, akkor

$$u = 4x - 1,$$

$$\text{és } u = 2y - 6.$$

Itt ugyanazért nincs megoldás, mint az a) esetben. 1 pont

d) ha $z = 3$, akkor

(6) $u = 4x - 2$,

(7) és $u = 2y - 16$.

Mivel $1 \le x \le 4$, ezért $x = 1$, $x = 2$ jöhet szóba. (hiszen $u \le 9$)

d$_1$) ha $x = 1$, akkor (6)-ból $u = 2$, és (7)-ből $y = 9$.

d$_2$) ha $x = 2$, akkor (6)-ból $u = 6$, és (7)-ből $y = 11$, ami nem jó, mert ellentmond (1)-nek. 2 pont

Így a feladatnak három megoldása van:

b$_1$) – ből 1014,

b$_2$) – ből 2218,

d$_1$) – ből 1932. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

a) és c) számolással való megoldása esetén is megkapja a versenyző az 1+ 1 pontot.

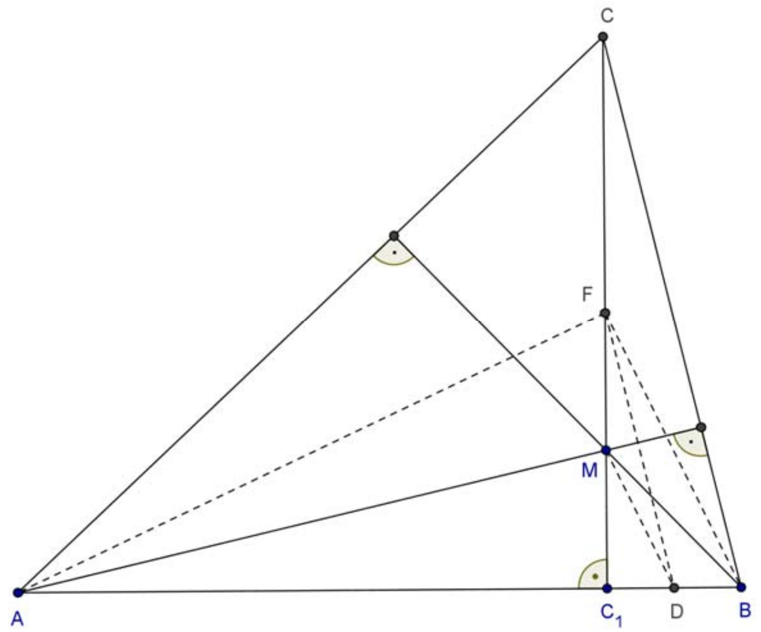
Ekkor

x	y	z	u
1	$-\frac{9}{2}$	0	5
2	$-\frac{5}{2}$	0	9
1	$\frac{9}{2}$	2	3
2	$\frac{13}{2}$	2	7

Ezek nem megoldások, mert egyik y sem egész.

4. **Az ABC hegyesszögű háromszög M magasságpontja a CC_1 magasságvonalon úgy helyezkedik el, hogy $CM : MC_1 = 3:1$. (C_1 a magasság talppontja)**
Mekkora az $AFB\angle$, ha F a CC_1 szakasz felezőpontja?

1. Megoldás



2. ábra

D pont a C_1B szakasz felezőpontját jelöli. 1 pont

Mivel a CC_1 szakasz felezőpontja F, a C_1B szakasz felezőpontja D, ezért a BCC_1 háromszög egyik középvonala FD.
A középvonal tulajdonsága miatt ez azt is jelenti, hogy $FD \| CB$, vagyis az AM magasság egyenese $\perp$ az FD egyenesre. 1 pont

Az ADF háromszögnek két magassága FM és AM egyenese, azaz az M pont az ADF háromszögnek is magasságpontja, ezért DM egyenese $\perp$ az AF egyenesére. 2 pont

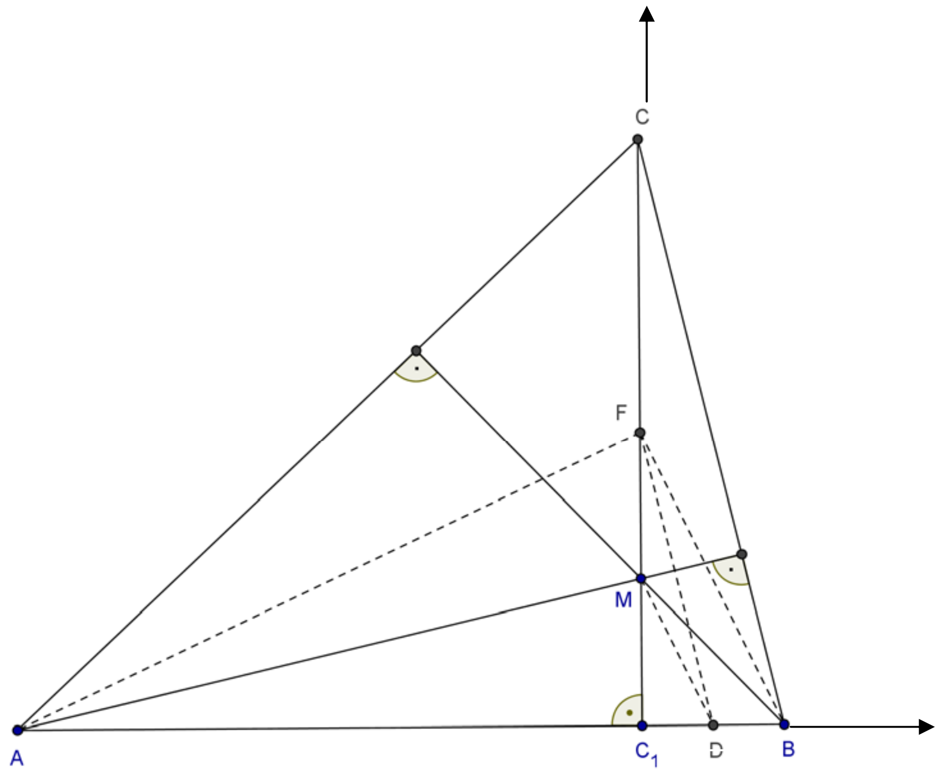
A $CM : MC_1 = 3:1$ feltétel miatt az M pont az FC_1 szakasz felezőpontja, ezért a DM szakasz a BFC_1 háromszög középvonala, így $DM \| BF$. 2 pont

Az előzőek szerint 2 pont
egyrészt DM egyenese $\perp$ az AF szakasz egyenesére,
másrészt $DM \| BF$,
ez együttesen azt jelenti, hogy

$BF \perp AF$ -re, azaz
$AFB\angle = 90°$. 2 pont

Összesen 10 pont

2. Megoldás:
Helyezzük el az ABC háromszöget (alkalmasan választott) koordináta rendszerben!



$A(-a;0)$	ahol $a \in R^+$	$M(0;m)$	ahol $m \in R^+$	
$B(b;0)$	ahol $b \in R^+$	$F(0;2m)$	ahol $m \in R^+$	
$C_1(0;0)$		$C(0;4m)$	ahol $m \in R^+$	2 pont

a) Először írjuk fel koordinátákkal az $\overrightarrow{AM}$ és $\overrightarrow{CB}$ vektorokat:

$$\overrightarrow{AM} \quad (a;m),$$

$$\overrightarrow{CB} \quad (b;-4m).$$

Mivel AM magasság, ezért AM merőleges a CB oldalra, azaz:

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CB} = 0.$$

Koordinátákkal:

(1) $$ab - 4m^4 = 0.$$ 3 pont

b) Ezután az $AFB\angle$ két szárán elhelyezkedő $\overrightarrow{FA}$ és $\overrightarrow{FB}$ vektorokat írjuk fel koordinátákkal:

$$\overrightarrow{FA} \quad (-a;-2m),$$

$$\overrightarrow{FB} \quad (b;-2m).$$

Mivel $AFB\angle$ nagyságát keressük, ezért felírjuk $\overrightarrow{FA}$ és $\overrightarrow{FB}$ skaláris szorzatát koordinátáikból:

$$\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} = -ab + 4m^2.$$ 3 pont

Ennek jobb oldala (1) miatt 0, azaz

$$\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FB} = 0\,.$$ 1 pont

Ez azt jelenti, hogy $\overrightarrow{FA}$ merőleges $\overrightarrow{FB}$-re, tehát

$$AFB\angle = 90^0\,.$$ 1 pont

Összesen 10 pont

5. Feladat

Palkó uzsonnára palacsintát készített barátainak. Az asztalon három tálon van palacsinta. Az elsőn 8 darab túrós, 6 darab diós, és 10 darab lekváros van, a másodikon 12 darab túrós, 10 darab diós, és 8 darab lekváros, a harmadikon 8 darab diós, 12 darab lekváros és néhány túrós.

a) Palkó egyik barátja, Peti, véletlenszerűen vett mindegyik tálról egy-egy palacsintát. Tudjuk, hogy a Peti által választott három palacsinta $\frac{3}{25}$ valószínűséggel volt azonos ízesítésű. Hány túrós palacsinta volt a harmadik tálon?

b) A harmadik tálon levő túrós palacsinták számától függően milyen határok közt változhat annak a valószínűsége, hogy Peti három azonos ízesítésű palacsintát vett ki? (Feltesszük, hogy a házigazda csak a harmadik tálon lévő túrós palacsinták számát változtatja.)

Megoldás

a) Legyen x a harmadik tálon lévő palacsinták száma! Az alábbi táblázatban az egyes tálakon lévő palacsinták számát foglaltuk össze.

	túrós	diós	lekváros	összes
1. tál	8	6	10	24
2. tál	12	10	8	30
3. tál	x	8	12	x+20

Annak valószínűsége, hogy Peti túrós palacsintát vesz ki az első tálból

$$P_1 = \frac{8}{24},$$

annak valószínűsége, hogy a második tálból vesz ki túrós palacsintát

$$P_2 = \frac{12}{30},$$

annak valószínűsége, hogy a harmadik tálból vesz ki túrós palacsintát

$$P_3 = \frac{x}{x+20}.$$

1 pont

Az egyes tálakból történő kivétek egymástól független események, ezért annak valószínűsége, hogy mindhárom tálról túrósat vesz ki

$$P_4 = P_1 \cdot P_2 \cdot P_3,$$

(1) $$P_4 = \frac{8}{24} \cdot \frac{12}{30} \cdot \frac{x}{x+20}.$$

Hasonlóan adódik, hogy a 3 darab diós palacsinta választásának valószínűsége:

(2) $$P_5 = \frac{6}{24}\cdot\frac{10}{30}\cdot\frac{8}{x+20},$$

a 3 darab lekváros palacsinta választásának valószínűsége pedig

(3) $$P_6 = \frac{10}{24}\cdot\frac{8}{30}\cdot\frac{12}{x+20}.$$ 1 pont

A túrós, diós illetve lekváros palacsinta-hármasok kiválasztásai egymást kizáró események, így az azonos ízesítésűek kivételének valószínűsége:

$$P = P_4 + P_5 + P_6,$$

azaz (1), (2) és (3) alapján:

$$P = \frac{8}{24}\cdot\frac{12}{30}\cdot\frac{x}{x+20} + \frac{6}{24}\cdot\frac{10}{30}\cdot\frac{8}{x+20} + \frac{10}{24}\cdot\frac{8}{30}\cdot\frac{12}{x+20}.$$ 1 pont

Ebből rendezés után kapjuk, hogy

(4) $$P = \frac{2x+30}{15(x+20)}.$$ 1* pont

A feltétel alapján

$$P = \frac{3}{25} = 0{,}12,$$

ezért

$$\frac{2x+30}{15(x+20)} = 0{,}12,$$

amiből

$$x = 30$$

következik, vagyis a harmadik tálon a harmadik tálon 30 darab túrós palacsinta volt. 1 pont

b) (4) alapján tudjuk, hogy $P = \frac{2x+30}{15(x+20)}$. A jobboldalt átalakítva:

(5) $$P = \frac{2}{15} - \frac{2}{3(x+20)}.$$ 1 pont

(5) jobb oldalán egy nem negatív x-ekre monoton növekvő függvényt kaptunk. (grafikonja hiperbola) 1 pont

Nem zártuk ki azt az esetet sem, hogy a harmadik tálon egyetlen túrós palacsinta sem volt, ezért x legkisebb szóba jöhető értéke

$$x_{\min} = 0,$$

így

$$P_{\min} = \frac{1}{10}.$$ 1 pont

Továbbá minden pozitív x-re P kisebb $\frac{2}{15}$-nél, hiszen $\frac{2}{15}$-ből egy pozitív számot vonunk ki, vagyis

$$P < \frac{2}{15}.$$ 1 pont

Tehát annak a valószínűsége, hogy Peti három azonos ízesítésű palacsintát vett ki, a harmadik tálon levő túrós palacsinták számától függően az

(6) $$\frac{1}{10} \le P < \frac{2}{15}$$

egyenlőtlenségeknek megfelelően változik.

Természetesen a $P(x) = \frac{2}{15} - \frac{2}{3(x+20)}$ függvény a (6) intervallumban nem vesz fel minden valós értéket, hiszen $x \in N$. 1 pont**

Összesen 10 pont

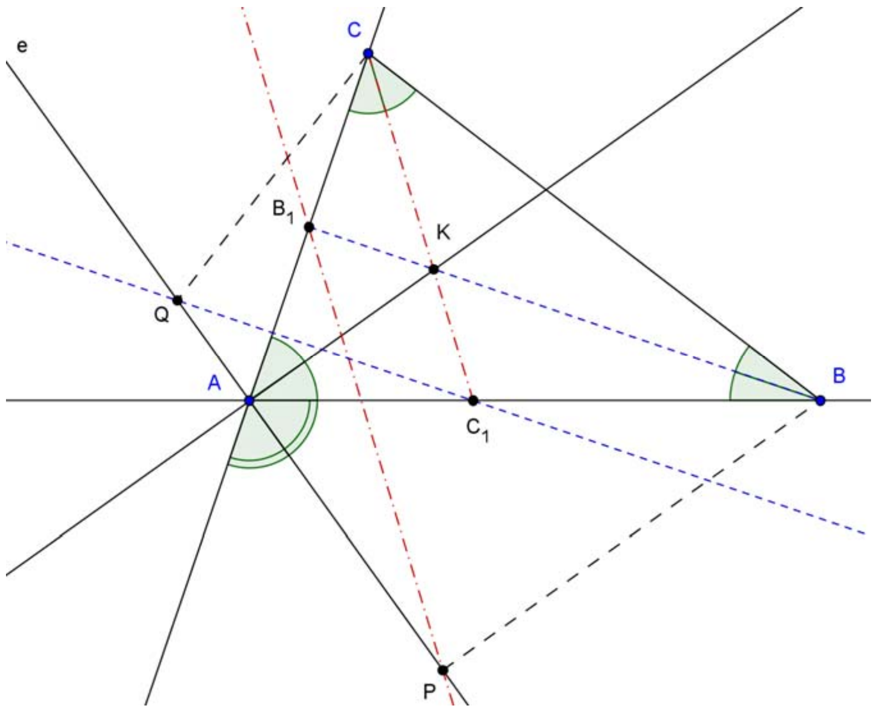
Megjegyzés:

- ha a versenyző (4) rendezését a b) részben végzi el, akkor ott kapja meg az (1*) pontot,
- ha a versenyző $x_{\min} = 1$-gyel számol, akkor is teljes értékűnek kell tekinteni a megoldását, ekkor $P_{\min} = \frac{32}{315}$,
- ha a versenyző a $<$, illetve $\le$ relációjeleket nem jól használja, akkor az (1**) pontot nem kaphatja meg.

6. Az ABC háromszög B és C csúcsainál fekvő belső szögfelezők az AC illetve AB oldalt a B_1 illetve C_1 pontokban metszik. Rajzoljuk meg az A csúcson keresztül a külső szögfelező e egyenest. A B_1 ponton át a CC_1 szögfelezővel, a C_1 ponton át a BB_1 szögfelezővel párhuzamos egyeneseket húzunk, amelyek az e egyenest a P illetve a Q pontokban metszik. Bizonyítsa be, hogy a $BCQP$ négyszög csúcsai egy körön helyezkednek el!

Megoldás

Jelöléseink az ábrán láthatók. (K a belső szögfelezők metszéspontja)



3. ábra

1 pont

Elegendő bizonyítani, hogy a $BCQP$ négyszög két szemben fekvő csúcsánál levő belső szögek összege $180°$, mert ekkor a négyszög húrnégyszög, tehát csúcsai egy körön vannak. 1 pont

A szokásos jelölések szerint $BAC\angle = \alpha$, $ABC\angle = \beta$ és $ACB\angle = \gamma$.
Ezzel

$$CAQ\angle = 90° - \frac{\alpha}{2},$$

hiszen az AK belső és az AQ külső szögfelező egyenesek merőlegesek egymásra. Mivel BB_1 belső szögfelező, ezért

$$KBC_1\angle = \frac{\beta}{2},$$

és így

$$QC_1A\angle = \frac{\beta}{2},$$

mert a feltételek szerint $C_1Q \| BB_1$. 1 pont

Ezzel az AC_1Q háromszögben a szögek összegére felírhatjuk, hogy:

(1) $$AQC_1\angle + \left[\left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right) + \alpha\right] + \frac{\beta}{2} = 180°.$$

Az (1) összefüggésből kapjuk, hogy

$$AQC_1\angle = 90° - \frac{\alpha+\beta}{2},$$

és az $\alpha+\beta+\gamma = 180°$ miatt

$$\alpha+\beta = 180° - \gamma,$$

azaz

$$AQC_1\angle = \frac{\gamma}{2}.$$ 1 pont

Ebből az következik, hogy a C és Q pontokból az AC_1 szakasz azonos nagyságú szögben látszik, és mivel a két pont az AB egyenesnek ugyanazon az oldalán helyezkedik el, ezért a C és Q pont rajta van az AC_1 szakasz fölé rajzolt $\frac{\gamma}{2}$ szögű látószögköríven. Ez pedig azt jelenti, hogy az AC_1CQ négyszög csúcsai egy körön vannak, vagyis ez a négyszög húrnégyszög. 1 pont

Hasonlóképpen, mivel $B_1P \| CC_1$, és CC_1 felezi az $ACB\angle = \gamma$ szöget, ezért

$$AB_1P\angle = \frac{\gamma}{2}.$$

Ebből következően az APB_1 háromszögben:

(2) $$APB_1\angle + \left[\left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right) + \alpha\right] + \frac{\gamma}{2} = 180°,$$

ahonnan

$$APB_1\angle = 90° - \frac{\alpha+\gamma}{2},$$

illetve az $\alpha+\beta+\gamma = 180°$ szögösszegből adódóan

$$APB_1\angle = \frac{\beta}{2}.$$ 1 pont

Ezért a B és P pontokból az AB_1 szakasz $\frac{\beta}{2}$ nagyságú szögben

látszik, és a két pont az AC egyenesnek ugyanazon az oldalán van, így B és P rajta van az AB_1 szakasz fölé rajzolt $\frac{\beta}{2}$ szögű látószögköríven.
Ez pedig azt jelenti, hogy az AB_1BP négyszög húrnégyszög. 1 pont

Meghatározzuk a $BCQP$ négyszög két szemben levő szögének összegét.

Már beláttuk, hogy az AC_1CQ négyszög húrnégyszög, ezért a köré írt körben

$$CQC_1\angle = CAC_1\angle = \alpha,$$

hiszen azonos körívhez tartozó kerületi szögek. Ez pedig azzal egyenértékű, hogy

(3) $$CQA\angle = CQP\angle = \alpha + \frac{\gamma}{2}.$$ 1 pont

Azt is bizonyítottuk, hogy az AB_1BP négyszög húrnégyszög, a köré írt körben $AB_1P\angle = \frac{\gamma}{2}$, ez a kerületi szög az AP húrhoz tartozik. Ebben a körben ugyancsak az AP húrhoz tartozik az $ABP\angle$ kerületi szög, tehát

$$ABP\angle = \frac{\gamma}{2}.$$

Eszerint:

(4) $$CBP\angle = \beta + \frac{\gamma}{2}.$$ 1 pont

(3) és (4) alapján a $BCQP$ négyszög két szemben levő szögének összege

$$CQP\angle + CBP\angle = (\alpha + \frac{\gamma}{2}) + (\beta + \frac{\gamma}{2}) = \alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Ez a húrnégyszögek tételének megfordítása alapján pontosan azt jelenti, hogy $BCQP$ húrnégyszög, vagyis a négyszög csúcsai valóban egy körön vannak.
Ezzel a feladat állítását bizonyítottuk. 1 pont

Összesen 10 pont