Oktatási Hivatal

Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2010/2011. tanév

Matematika I. kategória (SZAKKÖZÉPISKOLA) - 2. forduló
Megoldások

1. **Öt pozitív egész szám egy számtani sorozat első öt eleme. A sorozatnak a különbsége prímszám. Tudjuk, hogy az első négy szám köbének összege megegyezik az ezen öt tag közül vett páros sorszámú tagok összegének 150-szeresével. Továbbá azt is tudjuk, hogy az utolsó négy tag köbének összege az öt tag közül vett páratlan sorszámú tagok összegének a 224-szerese. Adja meg ezt az öt számot!**

Megoldás

Jelölje ennek a számtani sorozatnak a különbségét d, az öt pozitív egész szám közül a középsőt a. Ezzel a jelöléssel a számtani sorozat első öt tagja a következőképpen írható:

(1) $$a-2d;\, a-d;\, a;\, a+d;\, a+2d\,.$$ 1 pont

A feltételek alapján felírhatók az

$$(a-2d)^3+(a-d)^3+a^3+(a+d)^3=150\cdot(a-d+a+d),$$

és

$$(a-d)^3+a^3+(a+d)^3+(a+2d)^3=224\cdot(a-2d+a+a+2d),$$

összevonás után az

(2) $$(a-2d)^3+(a-d)^3+a^3+(a+d)^3=150\cdot 2a\,,$$

és

(3) $$(a-d)^3+a^3+(a+d)^3+(a+2d)^3=224\cdot 3a$$

egyenletek. 1 pont

A (3) egyenletből a (2) megfelelő oldalait kivonva kapjuk, hogy

(4) $$(a+2d)^3-(a-2d)^3=372a\,.$$ 1 pont

(4) rendezés és egyszerűsítés után

$$3a^2d+4d^3=93a\,,$$

alakra hozható, amiből

(5) $$4d^3=3a\cdot(31-ad)$$

következik. 1 pont

Mivel a sorozat tagjai pozitív egészek, ezért (1) alapján a sorozat különbsége is pozitív egész szám, így (5) mindkét oldala pozitív egész.

Ugyanakkor (5) jobb oldala 3-mal osztható, ezért a bal oldalnak is 3-mal oszthatónak kell lennie. Tudjuk, hogy 3 és 4 relatív prímek, így $4d^3$ csak úgy lehet 3-mal osztható, ha d^3, azaz d osztható 3-mal.

A feladat feltétele szerint a sorozat különbsége prímszám, ezért csak

$$d = 3$$

lehetséges. 2 pont

A $d = 3$ értéket az (5) egyenletbe írva, rendezés után a

(6) $$3a^2 - 31a + 36 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk.

Ennek gyökei:

$$a_1 = 9 \text{ és } a_2 = \frac{4}{3}.$$

1 pont

Az $a_2 = \frac{4}{3}$ nem egész szám, ezért nem megoldása a feladatnak. Eszerint csak

$$a = 9$$

lehetséges. 1 pont

Az $a = 9$ és a $d = 3$ számokat (1)-be helyettesítve a számtani sorozat első öt tagja:

$$3; 6; 9; 12; 15.$$ 1 pont

Ellenőrzés: (Vagy az ekvivalenciára hivatkozás.)

$$3^3 + 6^3 + 9^3 + 12^3 = 2700,$$

és

$$150(6 + 12) = 2700;$$

valamint

$$6^3 + 9^3 + 12^3 + 15^3 = 6048,$$

és

$$224(3 + 9 + 15) = 6048.$$

Tehát a $3; 6; 9; 12; 15$
számok megfelelnek a feltételeknek. 1 pont

Összesen: 10 pont

2. **Adott egy kör, amelynek egyenlete** $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 45 = 0$**.**

a) Bizonyítsa be, hogy a kör minden pontja az első koordináta-negyedbe esik!

b) Legyenek a körön levő P **pontok koordinátái** x **és** y**. Képezzük a** P **pontok koordinátáiból a** $k = \frac{y}{x}$ **hányadosokat! Mennyi** k **maximuma és a kör melyik pontjában veszi ezt föl?**

__Megoldás:__

a) Az

$$x^2 + y^2 - 10x - 10y + 45 = 0$$

egyenletből teljes négyzetté alakítással kapjuk, hogy:

(1) $$(x-5)^2 + (y-5)^2 = 5.$$

(1) szerint az $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 45 = 0$ egyenlet valóban kör egyenlete. 1 pont

A kör $C(u; v)$-vel jelölt középpontjának koordinátái:

$$u = 5 \text{ és } v = 5,$$

a kör sugara pedig $R = \sqrt{5}$.

1 pont

A körön lévő pontok koordinátáira:

$$x \geq 5 - \sqrt{5} = u - R > 0\text{, azaz } x > 0,$$

és

$$y \geq 5 - \sqrt{5} = v - R > 0\text{, azaz } y > 0,$$

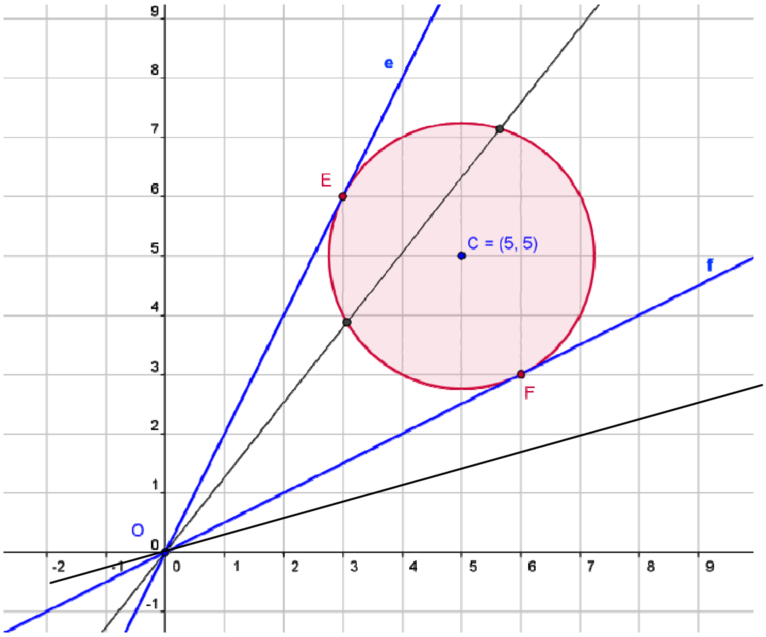
tehát a kör minden pontja valóban az első koordináta-negyedbe esik. 1 pont

b) A $k = \frac{y}{x}$ $(x > 0; y > 0)$ átalakításából

$$y = k \cdot x$$

egyenletet kapjuk, ami értelmezhető úgy, mint az origón áthaladó, $k(> 0)$ meredekségű egyenessereget megadó összefüggés. 1 pont

Az 1. ábrán megrajzoltunk néhány olyan egyenest, amely megfelel ennek a követelménynek.



1. ábra

Mivel k maximumát keressük és $P(x;y)$ a körön lévő pont, ezért a fenti egyenesseregből azt a legmeredekebb egyenest kell kiválasztanunk, melynek van közös pontja a körrel.

Ez éppen az origóból a körhöz húzott egyik érintő, mely létezik, mert az origó a körön kívül van (hiszen a kör minden pontja az I. koordináta negyedbe esik). 1 pont

Az érintő meredekségének kiszámításához az

$$x^2 + y^2 - 10x - 10y + 45 = 0$$

és a

$$y = k \cdot x$$

egyenletrendszer megoldását keressük.

Ebből a két egyenletből kapjuk, hogy

(2) $$\left(k^2 + 1\right) \cdot x^2 - (10k + 10) \cdot x + 45 = 0.$$ 1 pont

Az érintőhöz olyan k értéket keresünk, amely mellett pontosan egy darab x értéket kapunk.

A (2) egyenletnek akkor és csak akkor van x-re egy megoldása, ha diszkriminánsa 0. Ebből k-ra a

$$(10k+10)^2 - 4\cdot(k^2+1)\cdot 45 = 0,$$

rendezve a

(3) $$2k^2 - 5k + 2 = 0$$

egyenletet kapjuk. 1 pont

A (3) egyenlet gyökei a

$$k_1 = 2 \quad \text{és} \quad k_2 = \frac{1}{2}.$$

Eszerint a $k = \frac{y}{x}$ hányados maximális értéke

$$k = 2.$$ 1 pont

Ezt (2)-be helyettesítve

$$5x^2 - 30x + 45 = 0,$$

vagy egyszerűsítés után

$$x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 = 0,$$

ahonnan

$$x = 3,$$

továbbá az $y = k\cdot x$ egyenlet felhasználásával

$$y = 6$$

következik. 1 pont

A $k = \frac{y}{x}$ hányados a maximumot az $x^2 + y^2 - 10x - 10y + 45 = 0$ kör és az $y = 2x$ egyenes egyik érintési pontjában, az $E(3;6)$ pontban veszi fel, és értéke $k = \frac{y}{x} = 2$. 1 pont

Összesen: 10 pont

1. megjegyzés:

k értékének kiszámítását úgy is végezhetjük, hogy felírjuk az OC átmérőjű Thalesz kör egyenletét:

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2},$$

1 pont

majd megkeressük az adott kör és a Thalesz kör közös pontjait az

$$(x-5)^2+(y-5)^2=5$$

és

$$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$$

egyenletrendszer megoldásából. Azt kapjuk, hogy az érintési pontok :

$$x_1=3,\quad y_1=6,\quad E(3;6),$$

$$x_2=6,\quad y_1=3,\quad F(6;3).$$

2 pont

Ebből OE meredeksége $k_1=2$,

OF meredeksége $k=\frac{1}{2}$.

1 pont

A $k=\frac{y}{x}$ hányados a maximumot az $x^2+y^2-10x-10y+45=0$ kör és az $y=2x$ egyenes egyik érintési pontjában, az $E(3;6)$ pontban veszi fel, és értéke $k=\frac{y}{x}=2$.

1 pont

2. megjegyzés:

A $k=\frac{y}{x}$ hányados minimuma $k=\frac{1}{2}$, ez az OF pontokon áthaladó érintő meredeksége. Az E és F pontok egymás tükörképei az $y=x$ egyenesre vonatkozóan, ezért $F(6;3)$.

3. **Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számpárok halmazán!**

$$2x+3y+|x+y-2|=5,$$
$$x^2+4xy+4y^2=5x+11y-7.$$

1. Megoldás:

Két esetet vizsgálunk meg.

Elsőként azt, hogy

a) $x+y-2\geq 0$,

másodikként azt, hogy

b) $x+y-2<0$. 1 pont

Az a) esetben az abszolút-érték definíciója miatt

$$|x+y-2|=x+y-2,$$

és így az egyenletrendszer első egyenletéből azt kapjuk, hogy:

(1) $$3x+4y=7.$$

(1) –ből x–et kifejezve:

$$x=\frac{7-4y}{3}.$$

Ezt a kifejezést a második egyenletbe helyettesítjük:

(2) $$\left(\frac{7-4y}{3}\right)^2+4y\cdot\frac{7-4y}{3}+4y^2=5\cdot\frac{7-4y}{3}+11y-7.$$

(2)-ből a műveletek elvégzése és rendezés után a

(3) $$4y^2-11y+7=0$$

másodfokú egyenlet következik. 2 pont

A (3) egyenlet gyökei

$$y_1=1 \text{ és } y_2=\frac{7}{4}.$$

Ha $y_1=1$, akkor $x=\frac{7-4y}{3}$ miatt

$$x_1=1.$$

Az $x=1; y=1$ számpárra teljesül az $x+y-2\geq 0$ feltétel. 1 pont

Ha $y_2=\frac{7}{4}$, akkor (ugyancsak $x=\frac{7-4y}{3}$ alapján) $x_2=0$, de az $x=0; y=\frac{7}{4}$ számpárra nem teljesül az $x+y-2\geq 0$ feltétel, ezért $x=0; y=\frac{7}{4}$ nem megoldás. 1 pont

b) esetben

$$x+y-2<0.$$ 1 pont

Ekkor az abszolút-érték fogalma miatt

$$|x+y-2|=-x-y+2,$$

és így az első egyenletből azt kapjuk, hogy:

(4) $$x+2y=3.$$ 1 pont

Az egyenletrendszer második egyenlete átalakítható a következőképpen:

(5) $$(x+2y)^2=5\cdot(x+2y)+y-7.$$

(4) és (5) összevetéséből

$$9=15+y-7,$$

illetve

$$y=1$$

adódik, ez pedig (4) alapján azt jelenti, hogy

$$x=1.$$ 1 pont

Az $x=1;\quad y=1$ számpárra nem teljesül az $x+y-2<0$ feltétel, tehát nem ad új megoldást. 1 pont

Ellenőrzés:

$2+3+|1+1-2|=5,\qquad 5=5;$

$1+4+4=9,\qquad 5+11-7=9.$

Minden esetet megvizsgáltunk, azt kaptuk, hogy a kiinduló egyenletrendszer egyetlen megoldása az $x=1; y=1$ számpár 1 pont

Összesen: 10 pont

2. Megoldás:

Legyen

$$x+y-2=a \text{ és } x+2y-3=b.$$

Ezzel a jelöléssel az egyenletrendszer első egyenlete így írható:

(1) $$a+b+|a|=0.$$ 1 pont

A második egyenletet is írjuk át a, b közti összefüggésre. A fenti jelöléssel

$$b^2=x^2+4y^2+4xy+9-6x-12y.$$

Mivel a második egyenlet szerint

$$x^2+4xy+4y^2=5x+11y-7,$$

ezért

$$b^2=5x+11y-7+9-6x-12y,$$

$$b^2=-x-y+2,$$

$$b^2=-a.$$

Így a második egyenlet az új változókkal:

(2) $$b^2+a=0.$$ 2 pont

Meg kell oldanunk az (1)-ből és (2)-ből álló egyenletrendszert.

Ha $a\ge 0$, akkor és (2) szerint csak

$$a=0$$

lehetséges, ekkor azonban

$$b=0$$

is teljesül. Ezek az értékek kielégítik az (1) egyenletet is, tehát az egyik megoldás

$$a=0;\ b=0.$$ 1 pont

Ekkor:

$$x+y-2=0,$$

és

$$x+2y-3=0,$$

amiből

$$x = 1$$

és

$$y = 1$$

adódik. 2 pont

Ha $a < 0$, akkor az abszolút-érték definíciója miatt $|a| = -a$, ebből pedig (1) szerint

$$b = 0$$

következik. 1 pont

Ekkor azonban (2)-ből $a = 0$ adódnék, ami ellentmond az $a < 0$ -nak. 1 pont

Az egyenletrendszer egyetlen megoldása tehát az

$$x = 1;\ y = 1$$

számpár. 1 pont

Ellenőrzés:

$2 + 3 + |1 + 1 - 2| = 5,\qquad 5 = 5;$

$1 + 4 + 4 = 9,\qquad 5 + 11 - 7 = 9.$

Az adott számpár kielégíti mindkét egyenletet. 1 pont

Összesen: 10 pont

3. **Megoldás**

Először átalakítjuk a megadott egyenleteket:

(1) $$(x + y - 2) + (x + 2y) + 2 + |x + y - 2| = 5,$$

(2) $$(x + 2y)^2 = 5(x + 2y) + y - 7.$$ 2 pont

Ezután új ismeretleneket vezetünk be:

(3) $$x + y - 2 = a,$$

(4) $$x + 2y = b.$$ 1 pont

Ezeket (1(-be és (2)-be beírva:

(5) $$a + b + |a| = 3,$$

(6) $$b^2 = 5b + y - 7.$$ 1 pont

(6)-ból y-t kiküszöbölhetjük, ha (4) és (3) különbségét vesszük,

$$y + 2 = b - a,$$

(7) $$y = b - a - 2,$$ 1 pont

majd(7)-et (6)-ba beírjuk:

$$b^2 - 6b + (a + 9) = 0.$$

Ez b–ben másodfokú egyenlet, „a" paraméterrel, így

(8) $$b_{1,2} = 3 \pm \sqrt{-a}.$$ 1 pont

Innen megállapítjuk, hogy „a" nem lehet pozitív, tehát

$$a \le 0.$$ 1 pont

(8)-at (5)-be behelyettesítve

$$a + 3 \pm \sqrt{-a} + |a| = 3.$$

De $a \le 0$ miatt $|a| = -a$, így

$$\pm\sqrt{-a} = 0.$$

Ennek az egyenletnek a megoldása:

$$a = 0,$$

amiből (8) alapján:

$$b = 3.$$ 1 pont

(3)-ba és (4)-be visszahelyettesítve:

$$x + y = 2,$$

$$x + 2y = 3.$$

Ennek pedig egyetlen megoldása az

$$x = 1;\ y = 1$$

számpár. 1 pont

Ellenőrzés:

$2+3+|1+1-2|=5, \qquad 5=5;$

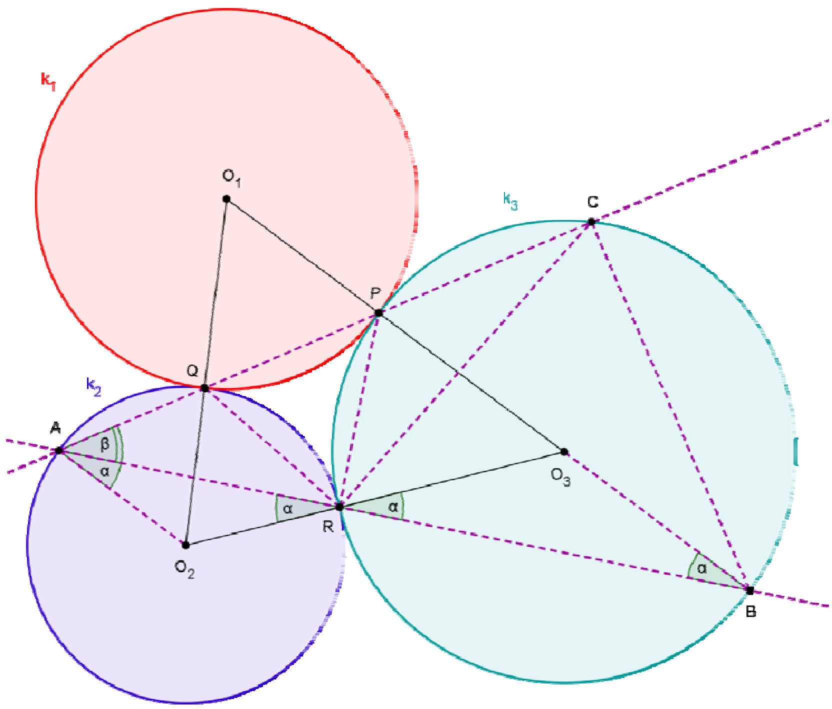
$1+4+4=9, \qquad 5+11-7=9.$

Az adott számpár kielégíti mindkét egyenletet. 1 pont

Összesen: 10 pont

4. **Adottak a $k_1;k_2;k_3$ egymást páronként kívülről érintő körök. Az érintési pontjaik legyenek: $P=k_1 \cap k_3$, $Q=k_1 \cap k_2$ és $R=k_2 \cap k_3$. A PQ egyenes k_2 körrel való másik metszéspontja A és k_3-mal C. Az AR egyenes a k_3 kört B-ben is metszi.**
Bizonyítsa be, hogy az ABC háromszög derékszögű!

Megoldás: jelöléseink a 2. ábrán láthatók.



2. ábra

Azt fogjuk bizonyítani, hogy az ABC háromszög C csúcsában van derékszög. Ehhez elég belátni, hogy PB a k_3 kör átmérője, azaz P, O_3, B pontok egy egyenesre esnek. 1 pont

Jelöljük az $RAO_2\angle$-et α-val!

Az RAO_2 háromszög egyenlő szárú, ezért

$$ARO_2\angle = RAO_2\angle = \alpha\,,$$

továbbá

$$BRO_3\angle = ARO_2\angle = \alpha\,,$$

mert csúcsszögpár.

A BRO_3 háromszög szintén egyenlő szárú, amiből

$$RBO_3\angle = BRO_3\angle\,,$$

így

$$RBO_3\angle = \alpha\,.$$

Ebből az következik, hogy az AO_2 és BO_3 szakaszok egyenesei az AB egyenessel egyenlő szögeket zárnak be, ezért az AO_2 és BO_3 szakaszok párhuzamosak.

3 pont

Vezessük be az $RAQ\angle = \beta$ jelölést, ekkor

$$O_2AQ\angle = \alpha + \beta\,,$$

és mivel az AQO_2 háromszög egyenlő szárú, következik, hogy

$$O_2QA\angle = O_2AQ\angle = \alpha + \beta\,.$$

A csúcsszögpár miatt

$$O_1QP\angle = O_2QA\angle = \alpha + \beta\,.$$

A QPO_1 háromszög ugyancsak egyenlő szárú, ebből az adódik, hogy

$$O_1PQ\angle = O_1QP\angle = \alpha + \beta\,.$$

Továbbá

$$O_3PC\angle = O_1PQ\angle\,,$$

mert ez is csúcsszögpár, tehát

$$O_3PC\angle = \alpha + \beta\,.$$

Eszerint az AO_2 és PO_3 szakaszok egyenesei az AC egyenesével egyaránt

$\alpha + \beta$ szöget zárnak be, azaz az AO_2 és PO_3 szakaszok párhuzamosak. 4 pont

Mivel az AO_2-vel, mind a BO_3 mind az O_3P $(=PO_3)$ párhuzamos, ezért a $B; O_3; P$ pontok egy egyenesre illeszkednek. 1 pont

Azt kaptuk, hogy $P\,O_3\,B$ szakasz a k_3 kör átmérője, tehát Thalesz tétele alapján

$$PCB\angle = 90°.$$

1 pont

Összesen 10 pont

5. **Igazolja, hogy ha $a > 0$, $b > 0$ valós számok és $a \neq b$, akkor:**

a) $$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} > \frac{4}{a+b};$$

b) továbbá, hogy az

$$\frac{1}{1802} + \frac{1}{1803} + \ldots + \frac{1}{2010} > \frac{1}{10}$$

egyenlőtlenség teljesül!

Megoldás:

a) Induljunk ki a számtani és mértani közép között fennálló egyenlőtlenségből:

(1) $$\frac{a+b}{2} > \sqrt{a \cdot b}\,.$$

(1)-ben nem lehet egyenlőség, mert a feltételek szerint $a \neq b$. 1 pont

Mivel (1) mindkét oldala pozitív, ezért

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 > a \cdot b,$$

illetve

$$(a+b)^2 > 4 \cdot a \cdot b\,.$$

1 pont

Az $a > 0$ és $b > 0$, feltételek miatt $a + b > 0$ és $a \cdot b > 0$, tehát az $(a+b)^2 > 4 \cdot a \cdot b$ egyenlőtlenséget oszthatjuk az $(a+b) \cdot a \cdot b$ kifejezéssel a relációjel irányának megváltozása nélkül. 1 pont

Ebből azt kapjuk, hogy

$$\frac{a+b}{a\cdot b} > \frac{4}{a+b},$$

innen pedig a bal oldal ekvivalens átalakításával:

(2)
$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b} > \frac{4}{a+b},$$

ezzel a feladat első állítását bizonyítottuk. 1 pont

b) Az

$$\frac{1}{1802}+\frac{1}{1803}+\ldots+\frac{1}{2010} > \frac{1}{10}$$

egyenlőtlenség bizonyításához először vegyük észre, hogy a bal oldali összeg éppen 209 darab tört összege, amelyek közül a középső tört $\frac{1}{1906}$. 1 pont

Rendezzük át az egyenlőtlenség bal oldalát!

(3)
$$\frac{1}{1802}+\frac{1}{1803}+\ldots+\frac{1}{2010} = \left(\frac{1}{1802}+\frac{1}{2010}\right)+\left(\frac{1}{1803}+\frac{1}{2009}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{1905}+\frac{1}{1907}\right)+\frac{1}{1906}.$$

Az a) részbeli (2) eredmény alkalmazásával:

$$\frac{1}{1802}+\frac{1}{2010} > \frac{4}{3812},$$

$$\frac{1}{1803}+\frac{1}{2009} > \frac{4}{3812},$$

stb.,

és 104 darab ilyen pár van. 2 pont

Így (3)-ból az következik, hogy

$$\frac{1}{1802}+\frac{1}{1803}+\ldots+\frac{1}{2010} > 104\cdot\frac{4}{3812}+\frac{1}{1906},$$ 1 pont

(4)
$$\frac{1}{1802}+\frac{1}{1803}+\ldots+\frac{1}{2010} > \frac{209}{1906}.$$ 1 pont

Nyilvánvaló, hogy

$$\frac{209}{1906} > \frac{209}{2090},$$

így a (4) összefüggésből

$$\frac{1}{1802}+\frac{1}{1803}+\ldots+\frac{1}{2010}>\frac{209}{1906}>\frac{209}{2090}=\frac{1}{10},$$

azaz

$$\frac{1}{1802}+\frac{1}{1803}+\ldots+\frac{1}{2010}>\frac{1}{10},$$

és éppen ez volt a bizonyítandó állítás. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

Ha az a) esetben a versenyző a bizonyítandó állításból kiindulva, ekvivalens átalakításokkal jut el $(a-b)^2>0$–hoz, de nem hivatkozik az ekvivalenciára, akkor erre a részre 3 helyett 2 pontot kapjon.