Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2011/2012
Matematika I. kategória (SZAKKÖZÉPISKOLA)

2. forduló - megoldások

1. Az x valós számra teljesül a

$$2\cdot\sin 2x = 2\cdot\sin^3 x + \cos 2x\cdot\sin|x|$$

egyenlőség. Milyen értékeket vehet föl $\cos x$?

Megoldás:

a) Legyen $x \geq 0$, ekkor az abszolút-érték definíciója szerint $|x| = x$, és így

$\sin|x| = \sin x$. 1 pont

Ekkor $\cos x$ lehetséges értékeit a

(1) $$2\cdot\sin 2x = 2\cdot\sin^3 x + \cos 2x\cdot\sin x$$

egyenlőség alapján keressük.

A $\sin 2x = 2\cdot\sin x\cdot\cos x$ és a $\cos 2x = 2\cdot\cos^2 x - 1$ trigonometrikus azonosságok alkalmazásával (1)-ből

(2) $$4\cdot\sin x\cdot\cos x = 2\cdot\sin^3 x + \left(2\cdot\cos^2 x - 1\right)\cdot\sin x$$

adódik. 1 pont

Ha $\sin x = 0$, akkor teljesül a (2) egyenlőség. Ekkor a $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ azonosság alapján a $\cos x = -1$, vagy $\cos x = 1$ értékeket kapjuk. $(x \geq 0)$ 1 pont

Ha $\sin x \neq 0$, akkor (2) mindkét oldalát oszthatjuk a $\sin x$ kifejezéssel, amelyből

$$4\cdot\cos x = 2\cdot\sin^2 x + 2\cdot\cos^2 x - 1,$$

illetve $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ miatt

(3) $$4\cdot\cos x = 2\cdot\left(1 - \cos^2 x\right) + 2\cdot\cos^2 x - 1$$

következik.

A (3) egyenletből rendezéssel azt kapjuk, hogy

$$\cos x = \frac{1}{4} \quad (x \geq 0).$$

Mivel az $f(x) = \cos x$ függvény értékkészlete $[-1,+1]$, ezért a $\cos x = 1$, a $\cos x = -1$, és a $\cos x = \frac{1}{4}$ valóban megoldások (végtelen sok nem negatív x-re ezeket az értékeket fel is veszik). 1 pont

b) Ha $x<0$, akkor $|x|=-x$, így $\sin|x|=\sin(-x)$, és a $\sin(-x)=-\sin x$ trigonometrikus azonosság miatt

$$\sin|x|=-\sin x.$$ 1 pont

Eszerint $\cos x$ lehetséges értékeit a

(4) $$2\cdot\sin 2x=2\cdot\sin^3 x-\cos 2x\cdot\sin x$$

egyenlőség alapján keressük.

Ismét alkalmazzuk a $\sin 2x=2\cdot\sin x\cdot\cos x$ és a $\cos 2x=2\cdot\cos^2 x-1$ azonosságokat, ezért (4)-ből

(5) $$4\cdot\sin x\cdot\cos x=2\cdot\sin^3 x-\left(2\cdot\cos^2 x-1\right)\cdot\sin x$$

következik. 1 pont

Ez teljesül $\sin x=0$-ra, és ebből ismét a $\cos x=-1$, illetve $\cos x=1$ értékeket kapjuk. ($x<0$)

Ha pedig $\sin x\neq 0$, akkor (5) mindkét oldalát osztjuk $\sin x$-szel, ebből

$$4\cdot\cos x=2\cdot\sin^2 x-2\cdot\cos^2 x+1,$$

illetve $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ miatt a

(6) $$4\cdot\cos x=2\cdot\left(1-\cos^2 x\right)-2\cdot\cos^2 x+1$$

egyenletet kapjuk. 1 pont

(6)-ból rendezés után

(7) $$4\cdot\cos^2 x+4\cdot\cos x-3=0$$

következik.

A $\cos x$-ben másodfokú (7) egyenlet megoldásai

$$\cos x=\frac{1}{2} \text{ és } \cos x=-\frac{3}{2}.$$ 1 pont

A $\cos x=\frac{1}{2}$ egyenlet végtelen sok negatív valós x-re teljesül, a $\cos x=-\frac{3}{2}$ egyenlet azonban egyetlen valós számra sem, tehát az utóbbi nem megoldás. 1 pont

c) Minden lehetséges esetet megvizsgáltunk, és azt kaptuk, hogy a kiinduló egyenletben $\cos x$ lehetséges értékei:

$\cos x=-1$, ha $x\in R$; $\cos x=\frac{1}{4}$, ha $x\in R\setminus R^+$; $\cos x=\frac{1}{2}$, ha $x\in R^-$és ,

$\cos x=1$, ha $x\in R$ 1 pont

Összesen: 10 pont

2. **A $3p \cdot x + 12q \cdot y + 121 = 0$ egyenletű egyenes érinti a $4y^2 = x$ egyenletű parabolát, ahol p és q pozitív prímszámok.**
Határozza meg az egyenes és a parabola érintési pontjának koordinátáit!

Megoldás:

A $4y^2 = x$ egyenletből $x \geq 0$ következik. 1 pont

A feltétel szerint $3p \cdot x + 12q \cdot y + 121 = 0$ egyenesnek és a $4y^2 = x$ parabolának egyetlen közös pontja van, ezért a két alakzat egyenleteiből álló egyenletrendszernek egy megoldása van, és a kapott (x,y) értékek az érintési pont koordinátái. Az egyenletrendszer megoldását a parabola egyenletének az egyenes egyenletébe való helyettesítésével számítjuk:

$$3p\left(4y^2\right) + 12qy + 121 = 0$$

(1) $$12 \cdot p \cdot y^2 + 12 \cdot q \cdot y + 121 = 0.$$ 1 pont

Az (1) egyenlet az y változóban másodfokú, hiszen a feltételek miatt $p > 0$. A másodfokú egyenletnek akkor van egy megoldása, ha az egyenlet diszkriminánsa zérus, azaz 1 pont

$$144 \cdot q^2 - 4 \cdot 12 \cdot p \cdot 121 = 0,$$

amelyből

(2) $$3 \cdot q^2 = 11^2 \cdot p$$

következik. 1 pont

(2) szerint $3 \mid 11^2 \cdot p$, de mivel 3 és 11 relatív prímek, ezért szükségképpen $3 \mid p$, mivel pedig p pozitív prím, ez csakis úgy lehetséges, ha

$$p = 3.$$ 1 pont

Ebből (2) alapján

$$q^2 = 11^2$$

következik, és mivel q is pozitív prím, ezért

$$q = 11.$$ 1 pont

A kapott eredményt (1)-be behelyettesítve a

$$36 \cdot y^2 + 132 \cdot y + 121 = 0,$$

vagyis

$$(6y + 11)^2 = 0$$

egyenlet adódik, amiből

$$6 \cdot y + 11 = 0,$$

azaz

$$y=-\frac{11}{6}.$$ 1 pont

Így $4y^2=x$ alapján

$$x=\frac{121}{9}$$

következik, és ez megfelel az $x\geq 0$ feltételnek. 1 pont

A $3p\cdot x+12q\cdot y+121=0$ egyenes és a $4y^2=x$ parabola közös pontja tehát az

$$E\left(\frac{121}{9};-\frac{11}{6}\right)$$

pont. 1 pont

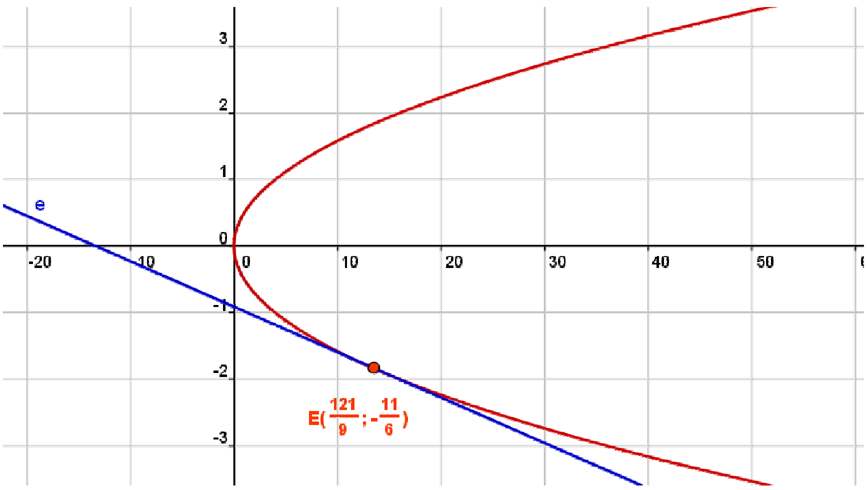
A $p=3$ és a $q=11$ értékek mellett a szereplő egyenes egyenlete:

$$9\cdot x+132\cdot y+121=0.$$

Látható, hogy az egyenes nem párhuzamos a koordináta-rendszer x tengelyével, azaz a parabola tengelyével, vagyis a kapott $E\left(\frac{121}{9};-\frac{11}{6}\right)$ közös pont az egyenesnek és a parabolának nem metszéspontja, hanem valóban érintési pontja, mint ahogy az 1. ábra mutatja. <u>1* pont</u>

Összesen: 10 pont

<u>Megjegyzés:</u> az 1* pontot akkor is megkapja a versenyző, ha az ehhez tartozó magyarázatot az 1. ábra nélkül adja meg.

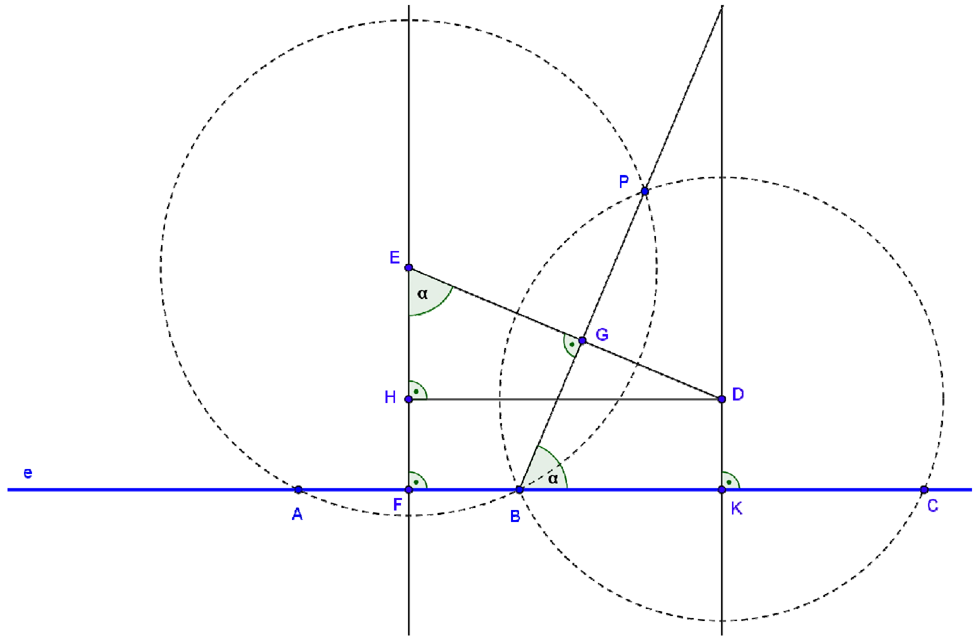


1. ábra

3. **Adott az e egyenes, és adottak az e egyenesen az $A;B;C$ pontok ebben a sorrendben. Legyen a B ponton áthaladó, a BA és BC félegyenesektől különböző félegyenes tetszőleges pontja P. Az ABP és BCP háromszögek köré írható körök középpontját jelölje rendre E és D.**
   Határozza meg a DE távolságot, ha adott az $AC = d$ szakasz és a derékszögnél kisebb $PBC\angle = \alpha$ szög!

Megoldás:

A feltételeknek megfelelő ábrát készítettünk (2. ábra), ezen az AB szakasz felezőpontját F-fel, a BC szakasz felezőpontját K-val jelöltük.



2. ábra

1 pont

Mivel

$$FB = \frac{AB}{2} \text{ és } BK = \frac{BC}{2},$$

ezért

$$FK = KF = \frac{AB + BC}{2} = \frac{AC}{2},$$

és így $AC = d$ miatt

$$KF = \frac{d}{2}.$$

1 pont

Nyilvánvaló, hogy az F és K pontokban az e egyenesre rajzolt merőlegesek rendre áthaladnak a körök E és D középpontjain.

Húzzunk merőlegest a D pontból az EF egyenesre, így kapjuk a H pontot (lásd a 2. ábra).

Az $FKDH$ négyszög téglalap, ezért

$$DH = KF = \frac{d}{2}.$$ 2 pont

A körök középpontjait összekötő DE szakasz merőleges az e egyenessel α szöget bezáró BP félegyenesre, $(0° < \alpha < 90°)$, mivel DE szimmetriatengely. 1 pont

Legyen DE és BP metszéspontja G. A $BGEF$ négyszög húrnégyszög, mert két szemközti szöge $(F\angle \text{ és } G\angle)$ derékszög, tehát a másik két szemközti szög összege is $180°$. Ebből következik, hogy

$$GEF\angle = \alpha.$$ 2* pont

A DEH háromszög derékszögű, amelyben

$$DEH\angle \equiv GEF\angle = \alpha,$$

ezért

$$\sin\alpha = \frac{DH}{DE},$$

azaz

$$DE = \frac{DH}{\sin\alpha},$$

innen pedig $DH = \frac{d}{2}$ felhasználásával

$$DE = \frac{d}{2\cdot\sin\alpha}.$$

A feladatban szerelő két kör középpontjának távolsága tehát

$$DE = \frac{d}{2\cdot\sin\alpha}.$$ 3 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés: a 2* pontbeli állítást indokolhatja a versenyző úgy is, hogy $GEF\angle$ és $PBC\angle$ $\perp$-szárú hegyesszögpár, $(GE \perp BP \text{ és } EF \perp BC)$, így

$$GEF\angle = PBC\angle = \alpha.$$

4. Oldja meg a valós számok halmazán a

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^{x}+\left(\sqrt{3-\sqrt{8}}\right)^{x}=34$$

egyenletet!

Megoldás:

Az egyenletben a négyzetgyökjelek alatt mindenhol pozitív számok állnak, hiszen $3+\sqrt{8}>0$ nyilvánvalóan igaz, illetve a négyzetgyökfüggvény szigorúan monoton növekvő tulajdonsága miatt $3-\sqrt{8}=\sqrt{9}-\sqrt{8}>0$ is teljesül, tehát mindenütt értelmezettek és pozitívak az alapok. 1 pont

Keressünk kapcsolatot az első és a második tag alapjai között!

Szorozzuk össze az egyenletben szereplő exponenciális kifejezések alapszámait, (a művelet végrehajtása során alkalmazzuk a négyzetgyök azonosságát és az $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$ algebrai azonosságot):

(1) $$\sqrt{3+\sqrt{8}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{8}}=\sqrt{\left(3+\sqrt{8}\right)\cdot\left(3-\sqrt{8}\right)}=\sqrt{9-8}=1\,.$$

Ezért

$$\sqrt{3-\sqrt{8}}=\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}},$$ 2 pont

azaz egyenletünk:

$$\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^{x}+\left(\frac{1}{\sqrt{3+\sqrt{8}}}\right)^{x}=34$$

alakban is írható.

Vezessük be a $\left(\sqrt{3+\sqrt{8}}\right)^{x}=y$ jelölést! ($y>0$)

Az eredeti egyenlettel ekvivalens az

$$y+\frac{1}{y}=34,$$

amely átalakítva:

(2) $$y^2 - 34y + 1 = 0$$

következik, ami szintén ekvivalens átalakítás $y > 0$ miatt. 1 pont

A (2) egyenlet megoldásai

$$y_1 = 17 + 12 \cdot \sqrt{2} \text{ és } y_2 = 17 - 12 \cdot \sqrt{2}.$$ 1 pont

x meghatározásához hozzuk más alakra y_1-et és y_2-t!

A kapott pozitív valós számok mindegyike teljes négyzet, mégpedig

$$17 + 12 \cdot \sqrt{2} = \left(3 + 2 \cdot \sqrt{2}\right)^2$$

és

$$17 - 12 \cdot \sqrt{2} = \left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right)^2.$$ 2 pont

Eszerint felhasználva y jelentését y_1-ből

$$\left(\sqrt{3 + \sqrt{8}}\right)^x = \left(3 + 2 \cdot \sqrt{2}\right)^2,$$

$$\left(3 + \sqrt{8}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(3 + \sqrt{8}\right)^2,$$

ahonnan

$$x = 4$$

értéket kapjuk. 1 pont

Hasonlóan y_2-ből

$$\left(\sqrt{3 + \sqrt{8}}\right)^x = \left(3 - 2 \cdot \sqrt{2}\right)^2,$$

$$\left(3 + \sqrt{8}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(3 - \sqrt{8}\right)^2,$$

$$\left(3 + \sqrt{8}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(\frac{1}{3 + \sqrt{8}}\right)^2$$

$$\left(3 + \sqrt{8}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(3 + \sqrt{8}\right)^{-2}$$

ahonnan

$$x = -4$$

értéket kapjuk. 1 pont

Átalakításaink ekvivalensek voltak, a kapott gyökök

$$x_1 = 4, \text{ és } x_2 = -4.$$

tehát valóban megoldásai az eredeti egyenletnek. 1 pont

Összesen: 10 pont

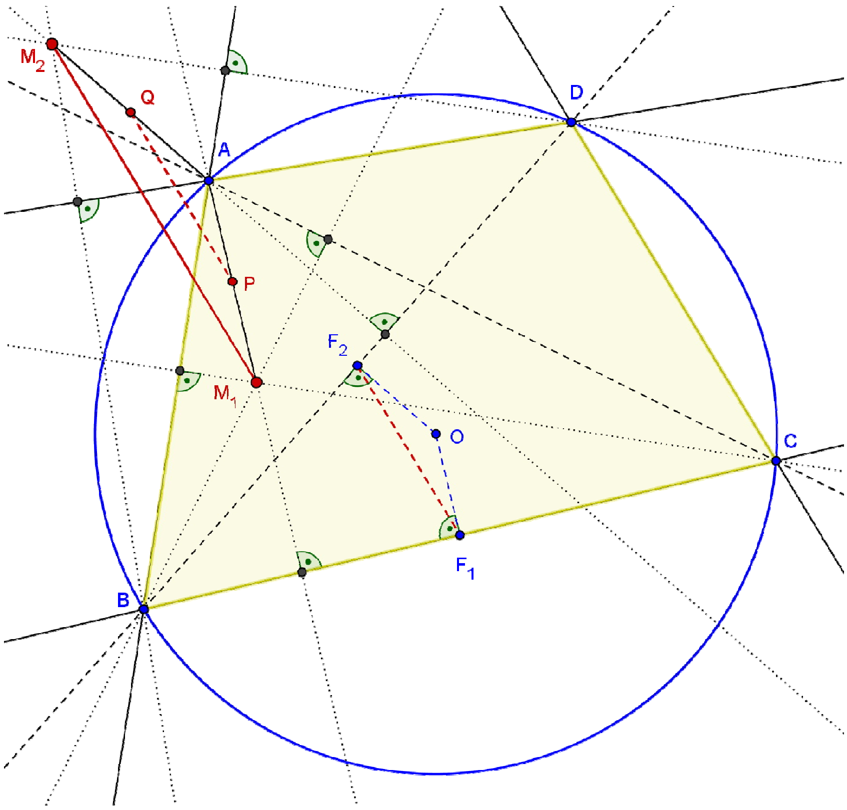
5. Az $ABCD$ négyszög húrnégyszög. Az ABC háromszög magasságpontja legyen M_1, az ABD háromszögé pedig M_2.

Bizonyítsa be, hogy

$$M_1M_2 \parallel CD \qquad \textbf{!}$$

1. Megoldás:

Megoldásunkban felhasználjuk azt a minden háromszögre érvényes tételt, amely szerint a háromszög körülírt körének középpontja feleakkora távolságra van egy oldaltól, mint a háromszög magasságpontja az oldallal szemközti csúcstól. 2* pont



3. ábra

A 3. ábrán F_1 és F_2 a BC és BD szakaszok felezőpontjai. 1 pont

Az F_1F_2 a BCD háromszög középvonala, és ezért

(1) $$CD \parallel F_1F_2.$$ 1 pont

Jelölje az $ABCD$ négyszög körülírt körének középpontját O, ez egyben az ABC és az ABD háromszögek körülírt körének is középpontja.

Alkalmazzuk az előrebocsátott tételt az ABC háromszögre, ezért

(2) $$OF_1 = \frac{AM_1}{2},$$

és

(3) $$AM_1 \parallel OF_1$$

(mindkettő a BC egyenesre merőleges).

Hasonlóan az ABD háromszögből

(4) $$OF_2 = \frac{AM_2}{2},$$

és

(5) $$AM_2 \parallel OF_2$$

(mindkettő a BD egyenesre merőleges). 2 pont

Kicsinyítsük az AM_1M_2 háromszöget az A pontból $\frac{1}{2}$ arányban, akkor az így létrejövő APQ háromszög oldalaira

(6) $$PQ \parallel M_1M_2;$$

Továbbá:

$$AP = \frac{AM_1}{2},$$

és (2) valamint (3) felhasználásával

(7) $AP = OF_1$ és $AP \parallel OF_1$, (mivel AP és AM_1 egyenese azonos).

Hasonlóan:

$$AQ = \frac{AM_2}{2},$$

és (4) valamint (5) miatt

(8) $AQ = OF_2$ és $AQ \parallel OF_2$, (mivel AQ és AM_2 egyenese azonos). 2 pont

(7)-ből és (8)-ből az következik, hogy

$$F_1OF_2\angle = PAQ\angle,$$

hiszen egyállású szögpár, ekkor viszont az F_2F_1O és QPA háromszögek egybevágóságára következtethetünk, amiből

$$F_2F_1O\angle = QPA\angle$$

adódik, és ezzel együtt

(9) $$F_1F_2 \parallel PQ\ .$$ 1 pont

Eredményeinket összevetve:

(1)-ből $CD \parallel F_1F_2$,

(9)-ből $F_1F_2 \parallel PQ$,

(6)-ból $PQ \parallel M_1M_2$,

tehát

$$CD \parallel M_1M_2 ,$$

és ezt akartuk bizonyítani.

1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

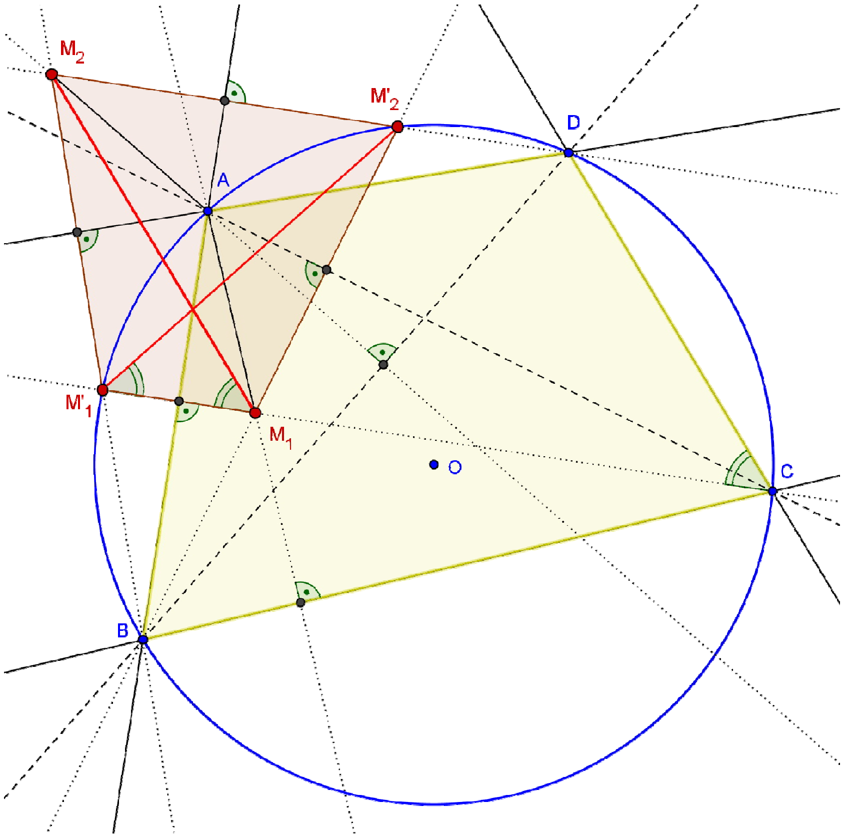
a) A kitűzött feladat állításánál több is bizonyítható, hiszen a fentiek alapján nyilvánvaló, hogy $M_1M_2 = CD$ is fennáll.

b) A 2* pontot akkor kapja meg a versenyző, ha bizonyítja az ide tartozó tételt, vagy ha helyesen hivatkozik a tételre és pontosan megjelöli a tétel forrását (pl. Geometriai feladatok gyűjteménye I., 551. feladat, vagy Matematikai gyakorló feladatgyűjtemény III. kötet 2339-es feladat). Ha helyesen hivatkozik a tételre, de nem jelöli meg a tétel forrását, akkor erre a részre 1 pontot kap, ha pedig a tételre sem hivatkozik, akkor erre a részre 0 pontot kap.

2. Megoldás:

2* pont

Ebben a megoldásban azt az ismert, és minden háromszögre érvényes tételt használjuk fel, hogy a háromszög magasságpontjának az oldalakra vonatkozó tükörképei a körülírt körön vannak.



4. ábra

1 pont

Az ábrán az M_1 és M_2 pontoknak az AB oldalegyenesre vonatkozó tükörképeit M_1'-vel és M_2'-vel jelöltük, és az előre bocsátott tétel miatt M_1' és M_2' illeszkedik a háromszög körülírt körére.

A tükrözés miatt az $M_1M_2'M_2M_1'$ négyszög szimmetrikus trapéz, amelynek szimmetriatengelye az AB oldal egyenese.

1 pont

Az AB szimmetriatengelyre merőleges M_1M_1' egyenes nyilvánvalóan tartalmazza az $ABCD$ négyszög C csúcsát, az M_1M_1' egyenessel párhuzamos M_2M_2' egyenesre pedig illeszkedik a négyszög D csúcsa.

Az $M_1M_2'M_2M_1'$ szimmetrikus trapézban az M_1M_2 és az $M_1'M_2'$ átlók azonos nagyságú szögeket zárnak be az M_1M_1' alappal, ezért 1 pont

(1) $$M_2M_1M_1'\angle = M_2'M_1'M_1\angle .$$

Az $M_1'CDM_2'$ négyszög csúcsai az $ABCD$ húrnégyszög körülírt körére illeszkednek, és az $M_1'CDM_2'$ négyszögben $M_1'C \parallel DM_2'$, (mert mindkettő $\perp$ AB-re) tehát ez a négyszög húrtrapéz. Ebben a húrtrapézban az $M_1'C$ alapon fekvő szögek egyenlők, így — 2 pont

(2) $\qquad \mathrm{M_2'M_1'C}\angle = \mathrm{DCM_1'}\angle.$

(1) és (2) összevetéséből és $\qquad \mathrm{M_2M_1M_1'}\angle = \mathrm{M_2'M_1'M_1}\angle =$ — 2 pont

$= \mathrm{M_2'M_1'C}\angle \equiv \mathrm{DCM_1'}\angle,$

így

$M_2M_1M_1'\angle = DCM_1'\angle.$ — 1 pont

Ez pedig azt jelenti, hogy M_1M_2 szakasz párhuzamos a CD szakasszal, és éppen ezt akartuk bizonyítani.

Összesen: 10 pont

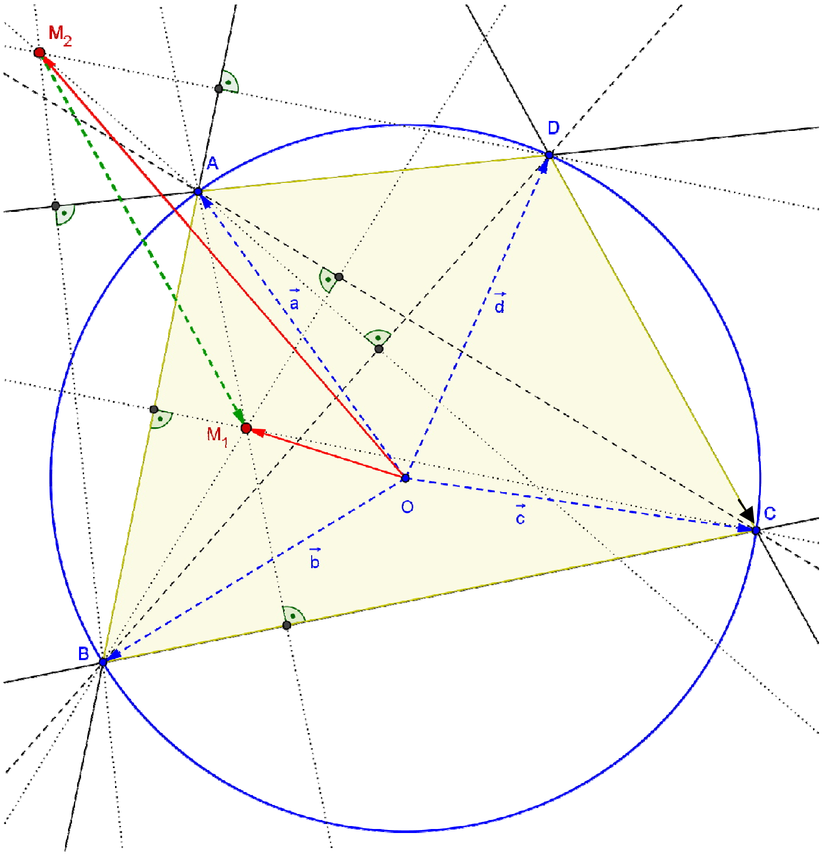
Megjegyzés:

a) A kitűzött feladat állításánál több is bizonyítható, hiszen a fentiek alapján nyilvánvaló, hogy $M_1M_2 = CD$ is fennáll.

b) A 2* pontot akkor kapja meg a versenyző, ha bizonyítja az ide tartozó tételt, vagy ha helyesen hivatkozik a tételre és pontosan megjelöli a tétel forrását (pl. Geometriai feladatok gyűjteménye I., 1079. feladat, vagy Matematikai gyakorló feladatgyűjtemény III. kötet 999-es feladat). Ha helyesen hivatkozik a tételre, de nem jelöli meg a tétel forrását, akkor erre a részre 1 pontot kap, ha pedig a tételre sem hivatkozik, akkor erre a részre 0 pontot kap.

3. Megoldás:

Ebben megoldásban a bizonyítást vektorok segítségével fogjuk végrehajtani. Felhasználjuk azt tételt, hogy ha egy háromszög körülírt körének középpontjából a háromszög csúcsaiba mutató vektorokat, összeadjuk, akkor az összegvektor a háromszög magasságpontjába mutat. 2* pont



5. ábra

Legyenek a húrnégyszög körülírt körének O középpontjából az $ABCD$ húrnégyszög csúcsaiba mutató vektorok rendre $\vec{a};\vec{b};\vec{c};\vec{d}$. 1 pont

A felhasznált tétel szerint az $\vec{a};\vec{b};\vec{c}$ vektorok összege az ABC háromszög magasságpontjába mutat, azaz

(1) $$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{OM_1},$$

és

(2) $$\vec{a}+\vec{b}+\vec{d}=\overrightarrow{OM_2}.$$ 2 pont

Vegyük az (1) és (2) vektoregyenletek különbségét:

(3) $$\vec{c} - \vec{d} = \overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}.$$ 2 pont

A (3) bal oldalán szereplő $\vec{c} - \vec{d}$ vektor a D csúcsból a C csúcsba mutató irányított szakasz. 1 pont

A (3) bal oldalán szereplő $\overrightarrow{OM_1} - \overrightarrow{OM_2}$ vektor az M_2 magasságpontból az M_1 magasságpontba mutató irányított szakasz. 1 pont

A (3) egyenlőség azt mutatja, hogy a két vektor egyenese párhuzamos, vagyis $M_1M_2 \| CD$ valóban teljesül. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

a) A kitűzött feladat állításánál több is bizonyítható, hiszen a fentiek alapján nyilvánvaló, hogy $M_1M_2 = CD$ is fennáll.

b) A 2* pontot akkor kapja meg a versenyző, ha bizonyítja az ide tartozó tételt, vagy ha helyesen hivatkozik a tételre és pontosan megjelöli a tétel forrását (pl. Reiman István: Matematika, 283. o., vagy Matematikai gyakorló feladatgyűjtemény III. kötet 2307-es feladat). Ha helyesen hivatkozik a tételre, de nem jelöli meg a tétel forrását, akkor erre a részre 1 pontot kap, ha pedig a tételre sem hivatkozik, akkor erre a részre 0 pontot kap.