Oktatási Hivatal

Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2011/2012
Matematika I. kategória (SZAKKÖZÉPISKOLA)

Döntő

1. Határozza meg az összes olyan x egész számot, amely eleget tesz az

$$\log_{\frac{x^2-3x+2}{x+7}}(x+4)<1$$

egyenlőtlenségnek!

<u>Megoldás:</u>

Először feltételeket adunk meg x-re.

a) A logaritmus értelmezése miatt

$$x+4>0,$$

azaz

(1) $$x>-4.$$

Ekkor teljesül az is, hogy az is, hogy

$$x+7>0,$$

vagyis az alapszám nevezője pozitív. 1 pont

b) A másik feltételünk abból adódik, hogy a logaritmus alapszáma pozitív, azaz

$$\frac{x^2-3x+2}{x+7}>0.$$

Ebből az $x+7>0$ tényezővel való szorzás után

$$x^2-3x+2>0,$$

vagyis

$$(x-1)\cdot(x-2)>0$$

következik.

Ez az egyenlőtlenség az

(2) $$A =]-\infty; 1[\cup]2; \infty[$$

számhalmazon teljesül.

c) A harmadik feltételünket abból kapjuk meg, hogy a logaritmus alapszáma nem lehet 1, azaz

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 7} \neq 1,$$

Amiből

$$x^2 - 3x + 2 \neq x + 7,$$

vagyis

$$x^2 - 4x - 5 \neq 0,$$

$$(x+1)\cdot(x-5) \neq 0,$$

azaz

(3) $$x \neq -1 \text{ és } x \neq 5.$$ 1 pont

d) (1)-et, (2)-t és (3)-at összevetve az x-re kapott feltétel:

$$x \in B,$$

ahol

(4) $$B =]-4; 1[\cup]2; \infty[\setminus \{-1; 5\}.$$ 1 pont

Ezután a kiinduló egyenlőtlenséget átalakítjuk a logaritmus definíciója szerint

(5) $$\log_{\frac{x^2-3x+2}{x+7}}(x+4) < \log_{\frac{x^2-3x+2}{x+7}} \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 7}.$$

<u>Két esetet kell megvizsgálnunk:</u> 1 pont

I. Ha a logaritmus alapszáma 1-nél nagyobb, azaz

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x + 7} > 1,$$

amiből ($x + 7 > 0$)

$$x^2 - 3x + 2 > x + 7,$$

$$x^2-4x-5>0,$$

$$(x+1)\cdot(x-5)>0.$$

Ez az egyenlőtlenség pontosan akkor igaz, ha

(6) $x<-1$, vagy $x>5$. 1 pont

Ekkor a logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő, azaz

(5)-ből

$$x+4<\frac{x^2-3x+2}{x+7},$$

$$x^2+11x+28<x^2-3x+2$$

adódik.

Ebből:

$$x<-\frac{13}{7}.$$

Ezt összevetve (6)-tal és (4)-gyel, azt kapjuk, hogy

$$x\in\left]-4;-\frac{13}{7}\right[.$$ 1 pont

Ebben a számhalmazban az egész számok közül csak az

(7) $x=-2$ és $x=-3$

fordul elő. 1 pont

II. Ha a logaritmus alapszáma 1-nél kisebb, azaz

$$\frac{x^2-3x+2}{x+7}<1,$$

ekkor az előzőek alapján

(8) $-1<x<5$

következik.

Ekkor a logaritmusfüggvény szigorúan monoton csökkenő, ezért

$$x+4>\frac{x^2-3x+2}{x+7},$$

ahonnan a műveletek elvégzése és rendezés után

(9) $$x > -\frac{13}{7}$$

következik. 1 pont

Egybevetve (8)-at, (4)-et és (9)-et

$$x \in C,$$

ahol

(10) $$C = \left]-1; 1\right[\cup \left]2; 5\right[$$

adódik.

Ebben a halmazban lévő egész számok

(11) $$x = 0,\ x = 3,\ x = 4.$$ 1 pont

(7) és (11) alapján az eredeti egyenlőtlenség összes megoldása tehát

$$x = -3,\ x = -2,\ x = 0,\ x = 3,\ x = 4.$$

Egyszerű számolással is ellenőrizhető, hogy a kapott egész számok valóban kielégítik a kiinduló egyenlőtlenséget. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

1) a versenyzőknek a feladatban szereplő logaritmusfüggvények szigorúan monoton növekvő, illetve csökkenő tulajdonságát nem volt szükséges bizonyítani, de utalniuk kellett erre a tulajdonságra.

2) az $x+4<\frac{x^2-3x+2}{x+7}$, illetve $x+4>\frac{x^2-3x+2}{x+7}$ egyenlőtlenségek

vizsgálatához a következőképpen is eljuthatunk:

a logaritmus numeruszára és az alapszámára vonatkozó feltételek felírása után a $\log_{\frac{x^2-3x+2}{x+7}}(x+4)<1$ egyenlőtlenség bal oldala átírható 10-es alapú logaritmikus alakba: $\frac{\lg(x+4)}{\lg\frac{x^2-3x+2}{x+7}}<1$.

Ha $\frac{x^2-3x+2}{x+7}>1$, akkor a 10-es alapú logaritmusfüggvény tulajdonsága miatt $\lg\frac{x^2-3x+2}{x+7}>0$, és így a $\frac{\lg(x+4)}{\lg\frac{x^2-3x+2}{x+7}}<1$ egyenlőtlenségből

$\lg(x+4)<\lg\frac{x^2-3x+2}{x+7}$ következik.

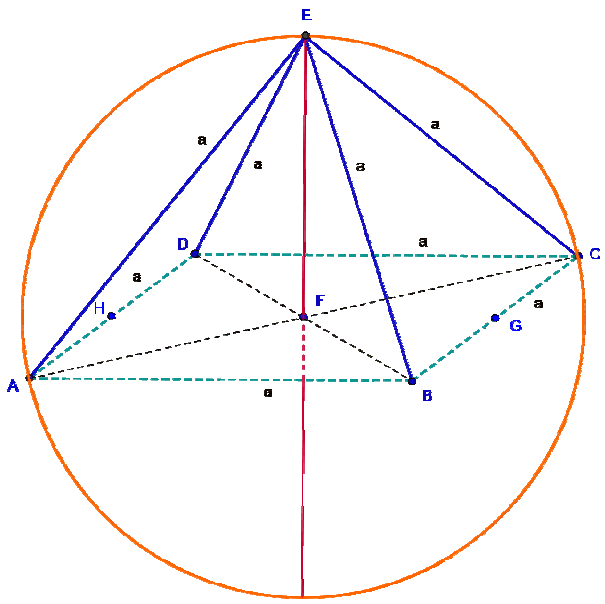
Ez pedig a 10-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő tulajdonsága miatt azt jelenti, hogy $x+4<\frac{x^2-3x+2}{x+7}$.

Ha pedig $0<\frac{x^2-3x+2}{x+7}<1$, akkor $\lg\frac{x^2-3x+2}{x+7}<0$, ezért a $\frac{\lg(x+4)}{\lg\frac{x^2-3x+2}{x+7}}<1$ egyenlőtlenségből $\lg(x+4)>\lg\frac{x^2-3x+2}{x+7}$ következik.

Ebből pedig a 10-es alapú logaritmusfüggvény szigorúan monoton növekvő tulajdonsága alapján azt kapjuk, hogy $x+4>\frac{x^2-3x+2}{x+7}$.

2. **Egy R sugarú gömbbe beírtunk egy olyan négyzetes gúlát, amelynek minden éle egyenlő. A gúlába pedig egy, a lapjait érintő kisebb gömböt írtunk.**
Mennyi a két gömbfelszín arányának pontos értéke?

Megoldás: jelöléseink az 1. ábrán láthatók.

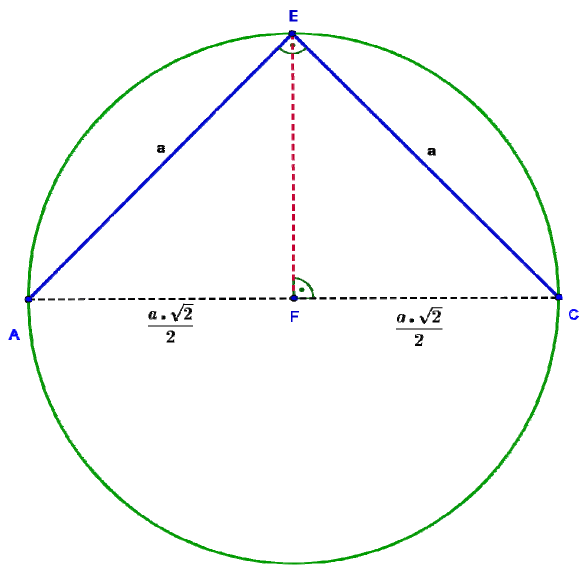


1. ábra

Legyen az $ABCDE$ gúla minden éle a hosszúságú, a gúla $ABCD$ alaplapjának középpontja F, a BC él felezőpontja G, az AD él felezőpontja H.

Messük el a gúlát egy olyan síkkal, amely átmegy az $A; C; E$ pontokon.

Ez a sík a gúla köré írt gömböt egy körben metszi, ez a kör az ACE háromszög körülírt köre (2. ábra).



2. ábra

Mivel az $ABCD$ négyzet átlója $a \cdot \sqrt{2}$ hosszúságú, ezért az ACE háromszögben

$$a^2 + a^2 = \left(a \cdot \sqrt{2}\right)^2,$$

ebből pedig a Pitagorasz-tétel megfordítása miatt az következik, hogy az ACE háromszög derékszögű, a derékszög az E csúcsban van. 1 pont

A Thales-tétel megfordítása miatt az ACE derékszögű háromszög köré írt körének középpontja az AC átfogó F felezési pontja, a kör sugara az átfogó fele:

$$\frac{a \cdot \sqrt{2}}{2} = AF = EF = CF .$$

Ha a gúlát a BDE síkkal metszettük volna el, akkor a keletkező BDE háromszög ugyancsak derékszögű, és a köré írt körének középpontja F, sugara pedig:

$$DF = EF = BF = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}.$$ 1 pont

Másrészt EF az ACE és a BDE háromszögben az átfogóhoz tartozó magasság, mert egyenlőszárú háromszögben az alaphoz tartozó magasság felezi az alapot.

Eszerint EF a gúla $ABCD$ lapjának két metsző egyenesére merőleges, tehát merőleges az $ABCD$ alaplap minden egyenesére. Ez éppen azt jelenti, hogy EF a gúla $ABCD$ lapjához tartozó magassága:

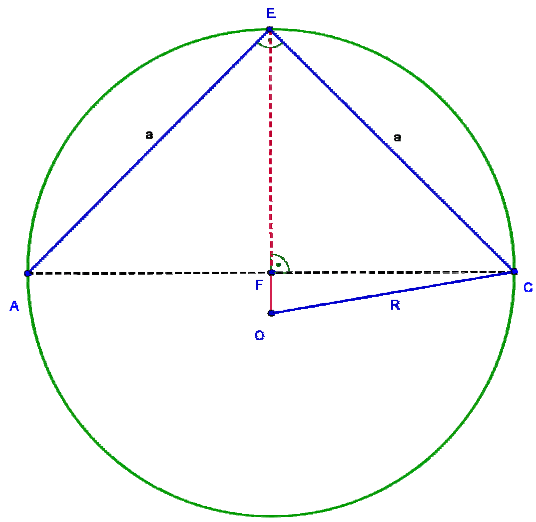
(1) $$m = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}.$$ 1 pont

Jelöljük a gúla köré írt gömb középpontját O-val. Az O pont az EF egyenesen van. Ha az O pont nem lenne azonos az F ponttal, akkor létezne az OFC derékszögű háromszög (3. ábra), melynek oldalai:

$$FC = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2},$$

$$OC = R,$$

$$OF = R - m \quad (vagy \quad m - R).$$



3. ábra

Az OFC háromszögre felírva a Pitagorasz-tételt, és (1)-et behelyettesítve:

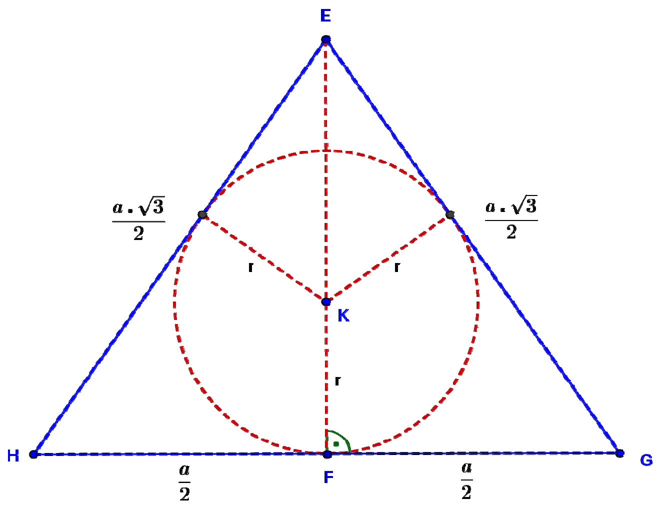
$$\left(R-\frac{a\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{a\cdot\sqrt{2}}{2}\right)^2=R^2,$$

Amiből rendezés után

(2) $$a=R\cdot\sqrt{2}\,.$$

Ez azt jelenti, hogy $OF=0$ és $m=R$, azaz O azonos F-fel. 1 pont

A gúlába írt gömb sugarának meghatározásához messük el a gúlát egy újabb síkkal, amely átmegy a gúla E csúcsán és a BC, illetve DA élek G, illetve H felezőpontján! (4. ábra)



4. ábra

Ez a metszősík tartalmazza az EF egyenest, erre az egyenesre illeszkedik a gúla beírt gömbjének középpontja is. A sík a gúlából egy egyenlőszárú háromszöget vág ki, amelynek beírt köre éppen a gúla beírt gömbjének egy főköre (4. ábra).

Az GHE háromszög egyenlőszárú, szárai az a oldalú szabályos háromszögek magasságvonalai, ezért hosszuk:

$$\frac{a\cdot\sqrt{3}}{2}.$$

A GHE háromszög oldalai a 4. ábra szerint:

$$GE = HE = \frac{a\cdot\sqrt{3}}{2},$$

$$GH = a,$$

a háromszögben EF szintén az alaphoz tartozó magasság, ezen van a háromszög beírt körének középpontja. 1 pont

A beírt kör sugarára ismert képlet:

$$r = \frac{T}{s}, \qquad (3)$$ 1 pont

ahol T a háromszög területe, s a háromszög félkerülete.
Felírjuk az GHE háromszög területét:

$$T_{GHE_\Delta} = \frac{a\cdot m}{2} = \frac{R\cdot\sqrt{2}\cdot R}{2} = \frac{R^2\sqrt{2}}{2},$$

és kiszámítjuk az s félkerületet figyelembe véve (2)-t

$$s = \frac{2\frac{a\sqrt{3}}{2} + a}{2} = \frac{a\left(\sqrt{3}+1\right)}{2} = \frac{R\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}.$$

Így (3)-ból

$$r = \frac{T_{GHE}}{s},$$

$$r = \frac{\frac{R^2\sqrt{2}}{2}}{\frac{R\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}},$$

$$r = \frac{R\left(\sqrt{3}-1\right)}{2}.$$ 2 pont

Mivel a gömbfelszínek aránya a lineáris méretek, ez esetben a körsugarak arányának négyzetével egyenlő, ezért:

$$\frac{A_k}{A_b} = \frac{R^2}{r^2},$$ 1 pont

azaz

$$\frac{A_k}{A_b} = \frac{R^2}{\frac{R^2\left(\sqrt{3}-1\right)^2}{4}},$$

és így

$$\frac{A_k}{A_b} = 4 + 2 \cdot \sqrt{3}$$

Az $ABCDE$ gúla köré írt R sugarú gömb felszínének és a gúlába írt r sugarú gömb felszínének aránya tehát $\frac{A_k}{A_b} = 4 + 2 \cdot \sqrt{3}$. <u>1 pont</u>

Összesen: 10 pont

<u>Megjegyzés:</u> természetesen a versenyző számolhat úgy is, hogy $R; r$-et a-val, illetve $R; a$-t r-rel fejezi ki, és a felszíneket részletesen felírva számítja ki az arányt. Eszerint teljes értékű a munkája akkor is, ha megfelelő indoklással a következőket írja fel:

$$r = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot \left(\sqrt{3}+1\right)},$$

$$R = \frac{a \cdot \sqrt{2}}{2}.$$

Az $ABCDE$ gúla köré írt R sugarú gömb felszíne:

$$A_k = 4 \cdot R^2 \cdot \pi$$

Az $ABCDE$ gúlába írt r sugarú gömb felszíne:

$$A_b = 4 \cdot r^2 \cdot \pi,$$

A két gömb felszínét felírva meghatározhatjuk arányukat:

$$\frac{A_k}{A_b} = \frac{4R^2\pi}{4r^2\pi} = \frac{R^2}{r^2}, \text{ azaz } \frac{A_k}{A_b} = \frac{a^2}{2} \cdot \frac{2 \cdot \left(\sqrt{3}+1\right)^2}{a^2},$$

ezzel pedig $\frac{A_k}{A_b} = \left(\sqrt{3}+1\right)^2$, vagyis $\frac{A_k}{A_b} = 4 + 2 \cdot \sqrt{3}$.

Az $ABCDE$ gúla köré írt R sugarú gömb felszínének és a gúlába írt r sugarú gömb felszínének aránya tehát

$$\frac{A_k}{A_b} = 4 + 2 \cdot \sqrt{3}.$$

3. Legyenek a és b olyan racionális számok, melyekre teljesül, hogy

$$a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0\,.$$

Bizonyítsa be, hogy ekkor a $\sqrt{1-ab}$ kifejezés is racionális szám!

1. Megoldás:

Ha $a = 0$, akkor a feltételi egyenletből $b = -\frac{1}{2}$, ekkor

$$\sqrt{1 - 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 1,$$

és ez racionális.

Ha $b = 0$, akkor a feltételi egyenletből $\mathrm{a} = -\frac{1}{2}$, ekkor

$$\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0} = 1,$$

és ez racionális.

Tehát, ha valamelyik változó értéke 0, akkor igaz az állítás. 2 pont

Ha a és b olyan racionális számok, ($a \neq 0$ és $b \neq 0$), melyek kielégítik az

$$a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0,$$

egyenletet, akkor kiemeléssel azt kapjuk, hogy

$$a \cdot b \cdot \left(a^2 + b^2 + 2ab\right) + 2 \cdot (a + b) + 1 = 0,$$

és így

(1) $$a \cdot b \cdot (a + b)^2 + 2 \cdot (a + b) + 1 = 0\,.$$ 1 pont

Legyen

$$a + b = x,$$

ezzel egyenletünk az x változóban másodfokú ($a \neq 0$ és $b \neq 0$),

(2) $$a \cdot b \cdot x^2 + 2x + 1 = 0\,.$$ 1 pont

A megoldóképlet alapján

(3) $$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 \cdot (1 - ab)}}{2ab}\,.$$ 1 pont

Mivel a és b olyan racionális számok, ($a \neq 0$ és $b \neq 0$), melyek kielégítik az

$$a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0$$

kiinduló egyenletet, ezért (2)-nek az

$$a + b = x$$

változóban van valós megoldása, tehát a (2) másodfokú egyenlet diszkriminánsa nem negatív, azaz

$$4 - 4ab \geq 0,$$

így $\sqrt{1-ab}$ valós szám. 2 pont

(3)-at átalakítva

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-ab}}{ab}.$$

Mivel $x = a + b$, ezért

$$a + b = \frac{-1 \pm \sqrt{1-ab}}{ab},$$

(4) $$ab(a+b) + 1 = \pm\sqrt{1-ab}$$

következik. 1 pont

(4) bal oldala racionális szám, mert a és b racionális szám, és a racionális számok halmaza zárt az összeadásra és a szorzásra nézve, ez pedig éppen azt jelenti, hogy a (4) jobb oldalán szereplő $\sqrt{1-ab}$ is racionális szám, és ezt akartuk bizonyítani. 2 pont

Összesen: 10 pont

2. Megoldás:

Ha $a = 0$, akkor a feltételi egyenletből $b = -\frac{1}{2}$, ekkor

$$\sqrt{1 - 0 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 1,$$

és ez racionális.

Ha $b = 0$, akkor a feltételi egyenletből $a = -\frac{1}{2}$, ekkor

$$\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 0} = 1,$$

és ez racionális.

Tehát, ha valamelyik változó értéke 0, akkor igaz az állítás. 2 pont

Tegyük fel a továbbiakban, hogy $a \neq 0$ és $b \neq 0$.

Ha megszorozzuk

$$a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0$$

mindkét oldalát az

$$a \cdot b \neq 0$$

kifejezéssel, akkor azt kapjuk, hogy

(1) $$a^4b^2 + a^2b^4 + 2a^3b^3 + 2a^2b + 2ab^2 + ab = 0\,.$$ 2 pont

(1) ekvivalens módon átalakítható:

(2) $$a^4b^2 + a^2b^4 + 2a^3b^3 + 2a^2b + 2ab^2 + 1 = 1 - ab\,.$$ 1 pont

(2) bal oldala egy háromtagú összeg négyzete, mégpedig

(3) $$\left(a^2b + ab^2 + 1\right)^2 = 1 - ab\,.$$

Mivel a és b racionális számok, ezért

$$a^2b + ab^2 + 1$$

is racionális szám, vagyis (3) bal oldala egy racionális szám négyzete, így a jobb oldal nem negatív, vagyis

$$1 - ab \geq 0,$$

tehát

$$\sqrt{1 - ab}$$

valós szám. 2 pont

(3)-ból következik, hogy

(4) $$a^2b + ab^2 + 1 = \sqrt{1 - ab}\,,$$

vagy

(5) $$a^2b + ab^2 + 1 = -\sqrt{1 - ab}\,.$$ 1 pont

Mivel (4) és (5) bal oldala racionális szám, hiszen a és b racionális szám, és a racionális számok halmaza zárt az összeadásra és a szorzásra, ezért mindkét egyenletben racionális szám a jobb oldali kifejezés is.
Ez pedig éppen a bizonyítandó állítással ekvivalens, ebből ugyanis mindkét esetben azt kapjuk, hogy $\sqrt{1 - ab}$ is racionális szám. 2 pont

Összesen: 10 pont

3. Megoldás:

Fejezzük ki az

$$a^3b + ab^3 + 2a^2b^2 + 2a + 2b + 1 = 0$$

egyenletből ab-t!

$$a \cdot b \cdot \left(a^2 + b^2 + 2ab\right) + 2 \cdot (a + b) + 1 = 0.$$

Mivel $a + b = 0$ esetén nem áll fenn az egyenlőség ($1 \neq 0$), ezért $a + b \neq 0$, így az egyenlet átrendezve:

$$ab = -\frac{2(a+b)+1}{(a+b)^2}.$$ 3 pont

Ekkor

$$1 - ab = 1 + \frac{2(a+b)+1}{(a+b)^2},$$

$$1 - ab = \frac{(a+b)^2 + 2(a+b)+1}{(a+b)^2},$$

(1) $$1 - ab = \frac{(a+b+1)^2}{(a+b)^2}.$$ 2 pont

Az (1) kifejezés jobb oldala nemnegatív, ezért $1 - ab \geq 0$, tehát négyzetgyöke értelmezett a valós számok halmazán, és 2 pont

(2) $$\sqrt{1-ab} = \left|\frac{a+b+1}{a+b}\right|.$$ 1 pont

Mivel a jobb oldalon racionális számok összege és hányadosa szerepel, (2) jobb oldala racionális, így $\sqrt{1-ab}$ is racionális. 2 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:

A 3. megoldás során a $\sqrt{1-ab}$-re kapott $\sqrt{1-ab} = \left|\frac{a+b+1}{a+b}\right|$ kifejezés, a feltételi egyenletet kielégítő $(a;b)$ racionális számpárok halmazán ekvivalens az 1. és a 2. megoldás során kapott $|ab(a+b)+1|$ kifejezéssel. Ez algebrai átalakítással igazolható.