A 2013/2014. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
második forduló

MATEMATIKA

I. KATEGÓRIA (SZAKKÖZÉPISKOLA)

Javítási-értékelési útmutató

1. A 257 olyan háromjegyű szám, amelynek számjegyei különbözőek. Ha a számjegyeket fordított sorrendben leírjuk, akkor az eredetinél nagyobb számot kapunk, a 752-t.
Hány ilyen tulajdonságú háromjegyű szám van?

Megoldás:

A keresett számok nem végződhetnek nullára, mert a fordítottjuknak is háromjegyű számnak kell lennie. 2 pont

Meghatározzuk azoknak a háromjegyű számoknak a számát, amelyeknek minden számjegye különböző és az egyesek helyén álló szám nem 0.

A százasok helyén 9-féle számjegy állhat, de a számjegyek különbözők, ezért az egyesek helyén már csak 8-féle számjegy lehet.
A tízesek helyén ismét 8-féle számjegy lehet, mert itt nem állhat az, ami a százasok illetve az egyesek helyén, viszont itt szerepelhet a 0.
Azokból a számokból, amelyeknek minden számjegye különböző és az egyesek helyén álló szám nem 0,

$$9 \cdot 8 \cdot 8 = 576$$

darab van. 3 pont

Ezek között a számok között szerepelnek azok is, amelyekben a százasok helyén álló számjegy kisebb, mint az egyesek helyén álló, és szerepel minden ilyen szám fordítottja is. 2 pont
Mivel a számok ilyen módon párokba állíthatók, így a feladat feltételének éppen a számok fele tesz eleget, vagyis

$$\frac{9 \cdot 8 \cdot 8}{2} = 288$$

ilyen szám van. 3 pont

Összesen: 10 pont

2. Az a valós paraméter mely értékeire lesz az

$$\left|\frac{x^2-4ax+4a^2+1}{x-2a}\right|+x^2-2x-1=0$$

egyenletnek pontosan egy valós megoldása?

Megoldás:

Az egyenlet bal oldalán szereplő tört nevezője miatt $x \neq 2a$.
Alkalmazva a két tag különbségének négyzetére vonatkozó azonosságot a tört számlálójában, és az $x^2-2x-1=x^2-2x+1-2=(x-1)^2-2$ azonos átalakítást:

$$\left|\frac{(x-2a)^2+1}{x-2a}\right|+x^2-2x+1-2=0,$$

illetve

(1) $$\left|(x-2a)+\frac{1}{x-2a}\right|+(x-1)^2=2.$$ 2 pont

Mivel a tört számlálója biztosan pozitív, (1) ekvivalens az

$$\frac{(x-2a)^2+1}{|x-2a|}+(x-1)^2=2$$

egyenlettel.

Az egyenletben szereplő törtet átalakítva, és figyelembe véve, hogy

$$|a+b|=|a|+|b|$$

abban az esetben, ha mindkét tag azonos előjelű, az egyenlet

(2) $$|x-2a|+\frac{1}{|x-2a|}+(x-1)^2=2$$

alakban írható. 2 pont

Egy pozitív számnak és reciprokának az összege legalább 2.

Egyenlőség akkor áll fenn, ha maga a szám egyenlő 1-gyel.

Ezért a (2) egyenlet csak úgy teljesülhet, ha

$$|x-2a|=1, \text{ és } x=1$$

egyszerre teljesül.

Ezekből:

(3) $$|1-2a|=1.$$

A (3) egyenlet szerint $1-2a=1$, vagy $1-2a=-1$, azaz $a=0$ vagy $a=1$. 2 pont

Megvizsgáljuk, hogy ezekre a paraméterekre pontosan egy valós megoldása van-e az egyenletnek.

Ha $a = 0$, akkor az eredetivel ekvivalens (1) egyenletből kapjuk, hogy

(4) $$\left|x + \frac{1}{x}\right| + (x-1)^2 = 2.$$

Mivel a (4) egyenletben az abszolút-értékes tényező legalább 2, a jobb oldal értéke pedig pontosan 2, ezért egyenlőség csak $(x-1)^2 = 0$, azaz $x = 1$ esetben áll fenn.
Az egyenletnek $a = 0$ mellett tehát valóban egy megoldása van. 2 pont

Ha $a = 1$, akkor az (1) egyenletből:

(5) $$\left|(x-2) + \frac{1}{x-2}\right| + (x-1)^2 = 2.$$

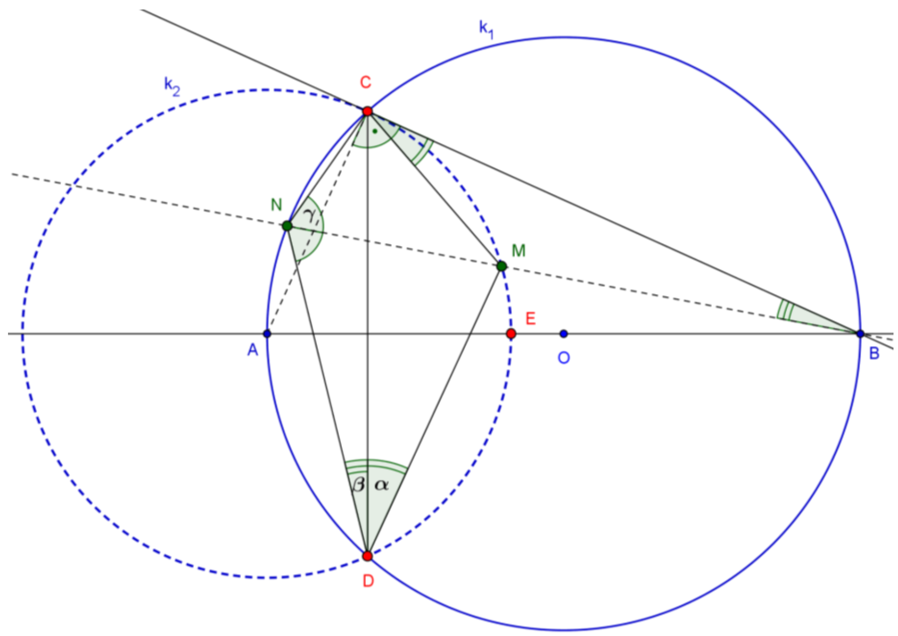
Az (5) egyenletben az abszolút-értékes tag szintén legalább 2, a jobb oldal értéke pedig pontosan 2, ezért egyenlőség ismét csak $(x-1)^2 = 0$, azaz $x = 1$ esetben áll fenn, ezért az $a = 1$ mellett is pontosan egy valós megoldása van az egyenletnek. <u>2 pont</u>

Összesen: 10 pont

3. Messe az AB átmérőjű k_1 kört a C és D pontokban az A középpontú k_2 kör. A k_2 körnek az AB átmérőre eső pontja legyen E! Válasszuk ki a k_2 körnek az ABC háromszög belsejébe eső CE körívén az ív egy tetszőleges M belső pontját! A BM egyenes és a k_1 kör másik metszéspontját jelöljük N-nel!
Bizonyítsa be, hogy
$$MN^2 = CN \cdot DN!$$

Megoldás:

Jelöléseink az 1. ábrán láthatók.



1. ábra 1 pont

A bizonyítandó
$$MN^2 = CN \cdot DN$$
összefüggés azonos átalakítása után elég megmutatni, hogy
$$\frac{MN}{DN} = \frac{CN}{MN}.$$ 1 pont

Ehhez elegendő igazolni, hogy a
$$CMN \quad \text{és} \quad MDN$$
háromszögek hasonlóak.

A két háromszög hasonlóságának belátásához elég bizonyítani, hogy megfelelő szögeik páronként megegyeznek, azaz:
$$CMN\angle = MDN\angle \text{ és } CNM\angle = MND\angle.$$ 1 pont

Mivel AB a k_1 kör átmérője, ezért a Thalész-tétel szerint AC merőleges BC-re, ebből következik, hogy BC egyenese a k_2 kör érintője. 1 pont

Ezért a k_2 körben $BCM\angle$ érintő szárú kerületi szög, és így az $MDC\angle = \alpha$ jelöléssel

$$BCM\angle = MDC\angle = \alpha .$$

A k_1 körben a kerületi szögek tételéből a $CDN\angle = \beta$ jelöléssel kapjuk, hogy

$$CBN\angle = CDN\angle = \beta .$$

1 pont

Az AB egyenese a k_1 és k_2 körök közös szimmetriatengelye, erre a tengelyre nézve a C és D pontok egymás tükörképei, ezért $BC = BD$.

Ez azt is jelenti, hogy a k_1 körben a két húrhoz azonos nagyságú kerületi szögek tartoznak, tehát a $CNB\angle = \gamma$ jelölést választva

$$CNB\angle = BND\angle = \gamma .$$

1 pont

A $CMN\angle$ a BCM háromszög külső szöge, ezért

$$CMN\angle = BCM\angle + CBM\angle = \alpha + \beta .$$

1 pont

A CMN és MDN háromszögekben két-két szög nagysága megegyezik, mert

$$CMN\angle = MDN\angle = \alpha + \beta$$

és

$$CNM\angle = MND\angle = \gamma ,$$

ezért a két háromszög hasonló. 1 pont

Hasonló háromszögekben a megfelelő oldalak aránya megegyezik,

$$\frac{MN}{DN} = \frac{CN}{MN},$$

ebből pedig a bizonyítandó

$$MN^2 = CN \cdot DN$$

állítás következik. 2 pont

Összesen: 10 pont

4. Milyen a valós paraméter esetén lesz pontosan két valós gyöke a

$$\sin^2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-(a+2)\cdot\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+2a=0$$

egyenletnek a $[0;2\pi]$ intervallumban?

Megoldás:

Vezessük be az $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ jelölést!

Az egyenlet a következő alakba írható:

(1) $$y^2-(a+2)\cdot y+2a=0\,.$$ 1 pont

Az (1) egyenlet az y ismeretlenre felírt paraméteres másodfokú egyenlet, melynek diszkriminánsa, $D=(a+2)^2-8a$. Átalakítással kapjuk, hogy

(2) $$D=(a-2)^2\,.$$

(2) azt jelenti, hogy az (1) egyenletnek mindig van valós megoldása.

A megoldóképletből kapjuk, hogy ezek

$$y_1=a$$

és

$$y_2=2\,.$$ 1 pont

Mivel

$$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right),$$

és

$$-1\le\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\le 1$$

ezért

$$y_2=2$$

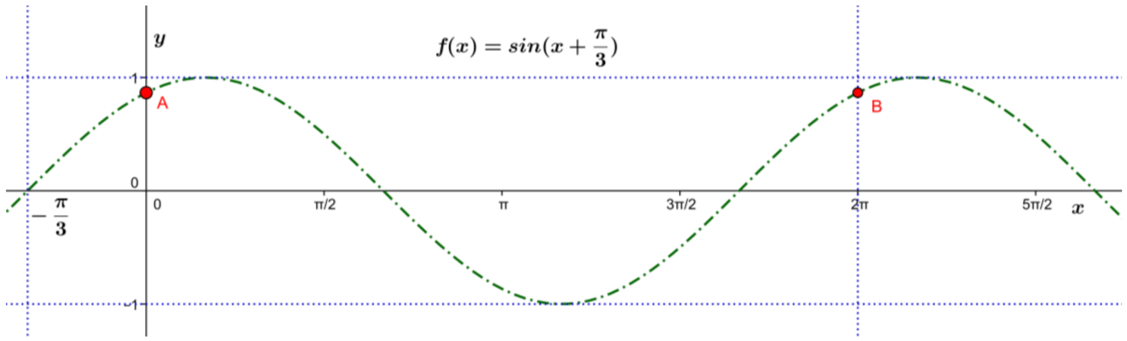
nem lehetséges. 1 pont

Eszerint csak

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=a$$

állhat fenn.

Tekintsük most az $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ függvény grafikonját a $[0;\,2\pi]$ intervallumon (2. ábra).



2. ábra 1 pont

A 2. ábrán jelzett A és B pontok koordinátái

$$A\left(0;\sin\frac{\pi}{3}\right) \text{ és } B\left(2\pi;\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right),$$

azaz

$$A\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ és } B\left(2\pi;\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

Az A és B pontokon átmenő egyenes egyenlete $y=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Ez az egyenes a $[0;\,2\pi]$ intervallumon három pontban metszi az $f(x)=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$ függvény grafikonját, ezért a $\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ egyenletnek a $[0;\,2\pi]$ intervallumban három valós megoldása van, így $a=\frac{\sqrt{3}}{2}$ nem lehetséges. 2 pont

Nem állhat fenn

$$a=1 \text{ és } a=-1,$$

sem, mert ezekre az értékekre

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1 \text{ illetve } \sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=-1$$

egyenleteknek a $[0;\,2\pi]$ intervallumban egy-egy valós megoldása van. 2 pont

Az ábra alapján belátható, hogy az $a\in[-1;1]$ intervallumban az

$$a=\frac{\sqrt{3}}{2},\ a=1 \text{ és } a=-1$$

értékek kivételével minden a valós számra a

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=a$$

egyenletnek pontosan két valós megoldása van. Ezek az a valós paraméterek a feladat megoldásai. 2 pont

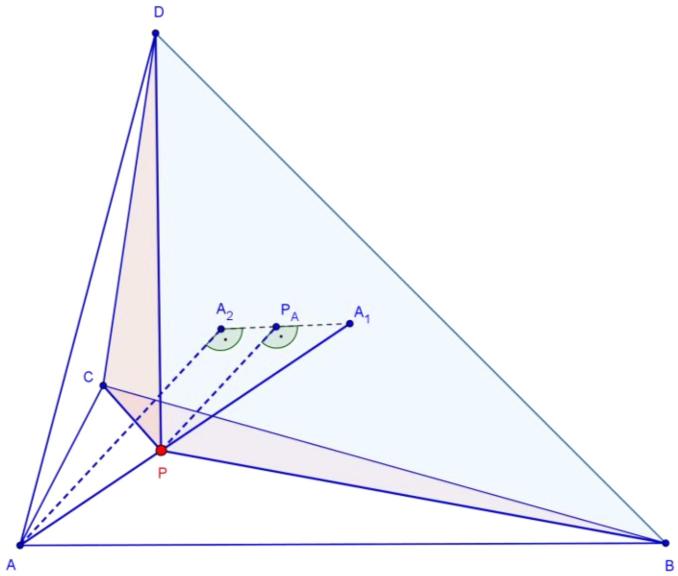
Összesen: 10 pont

5. Az $ABCD$ tetraéder belsejében vegyünk fel egy P pontot, majd kössük össze a tetraéder csúcsaival. Az $AP; BP; CP$ és DP egyenesek szemközti oldallapokon lévő döféspontjai rendre: $A_1; B_1; C_1$ és D_1.
Bizonyítsa be, hogy

$$\frac{PA_1}{AA_1}+\frac{PB_1}{BB_1}+\frac{PC_1}{CC_1}+\frac{PD_1}{DD_1}=1!$$

Megoldás:

Legyenek a csúcsok merőleges vetületei a szemközti oldallapon rendre: A_2, B_2, C_2 és D_2. Az AA_1A_2 háromszög síkjának és a BCD síknak az A_1A_2 metszésvonalára illeszkedik a P pontnak a BCD síkra eső merőleges vetülete, jelöljük ezt a pontot P_A-val (3. ábra).



3. ábra — 1 pont

Az AA_2 szakasz az $ABCD$ tetraédernek a BCD laphoz tartozó magassága és ezért az $ABCD$ tetraéder térfogata

(1) $$V_{ABCD}=\frac{T_{BCD}\cdot AA_2}{3}.$$ 1 pont

A $P; B; C; D$ pontok egy tetraéder csúcsai, amelynek a BCD lapjához tartozó magassága PP_A, így a $PBCD$ tetraéder térfogatára azt kapjuk, hogy

(2) $$V_{PBCD}=\frac{T_{BCD}\cdot PP_A}{3}.$$ 1 pont

Az (1) és (2) összefüggések megfelelő oldalainak arányából adódik, hogy

(3) $$\frac{V_{PBCD}}{V_{ABCD}}=\frac{PP_A}{AA_2}.$$ 1 pont

Mivel $AA_2 \parallel PP_A$, ezért a párhuzamos szelőszakaszok tétele miatt

$$\frac{PP_A}{AA_2} = \frac{PA_1}{AA_1},$$

és így (3)-ból

(4) $$\frac{V_{PBCD}}{V_{ABCD}} = \frac{PA_1}{AA_1}.$$ 2 pont

Hasonló módon bizonyíthatjuk, hogy

(5) $$\frac{V_{PACD}}{V_{ABCD}} = \frac{PB_1}{BB_1},$$

(6) $$\frac{V_{PABD}}{V_{ABCD}} = \frac{PC_1}{CC_1},$$

végül

(7) $$\frac{V_{PABC}}{V_{ABCD}} = \frac{PD_1}{DD_1}.$$ 2 pont

A (4)-(7) összefüggések megfelelő oldalainak összeadásával azt kapjuk, hogy

$$\frac{PA_1}{AA_1} + \frac{PB_1}{BB_1} + \frac{PC_1}{CC_1} + \frac{PD_1}{DD_1} = \frac{V_{PBCD} + V_{PACD} + V_{PABD} + V_{PABC}}{V_{ABCD}}.$$

Nyilvánvaló, hogy

$$V_{PBCD} + V_{PACD} + V_{PABD} + V_{PABC} = V_{ABCD},$$

és ezért

$$\frac{PA_1}{AA_1} + \frac{PB_1}{BB_1} + \frac{PC_1}{CC_1} + \frac{PD_1}{DD_1} = 1,$$

és éppen ezt akartuk bizonyítani.

2 pont

Összesen: 10 pont