A 2013/2014. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
döntő forduló

MATEMATIKA

I. KATEGÓRIA (SZAKKÖZÉPISKOLA)

Javítási-értékelési útmutató

1. Az a_n számsorozat tagjaira teljesül, hogy $a_0 = 5$, és minden $n \geq 1$ pozitív egész számra $a_n = \frac{1+a_{n-1}}{1-a_{n-1}}$. Határozza meg az a_{2014} szám értékét!

Megoldás: számítsuk ki a sorozat első néhány tagját. 1 pont

Az $a_n = \frac{1+a_{n-1}}{1-a_{n-1}}$ képzési szabály alapján $a_1 = \frac{1+a_0}{1-a_0} = \frac{1+5}{1-5} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$.

Hasonlóképpen

$$a_2 = \frac{1+a_1}{1-a_1} = \frac{1-\frac{3}{2}}{1+\frac{3}{2}} = -\frac{1}{5}, \text{ és } a_3 = \frac{1+a_2}{1-a_2} = \frac{1-\frac{1}{5}}{1+\frac{1}{5}} = \frac{2}{3},$$

továbbá

(1) $$a_4 = \frac{1+a_3}{1-a_3} = \frac{1+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}} = 5.$$ 2 pont

Az $a_n = \frac{1+a_{n-1}}{1-a_{n-1}}$ képzési szabály és (1) alapján nyilvánvaló, hogy az a_n számsorozat tagjai periodikusan ismétlődnek, mégpedig

(2) $$a_{4k} = 5,\ a_{4k+1} = -\frac{3}{2},\ a_{4k+2} = -\frac{1}{5},\ a_{4k+3} = \frac{2}{3}$$

ahol $k \in N$. 3 pont

Mivel

$$2014 = 2012 + 2 = 4 \cdot 503 + 2,$$ 2 pont

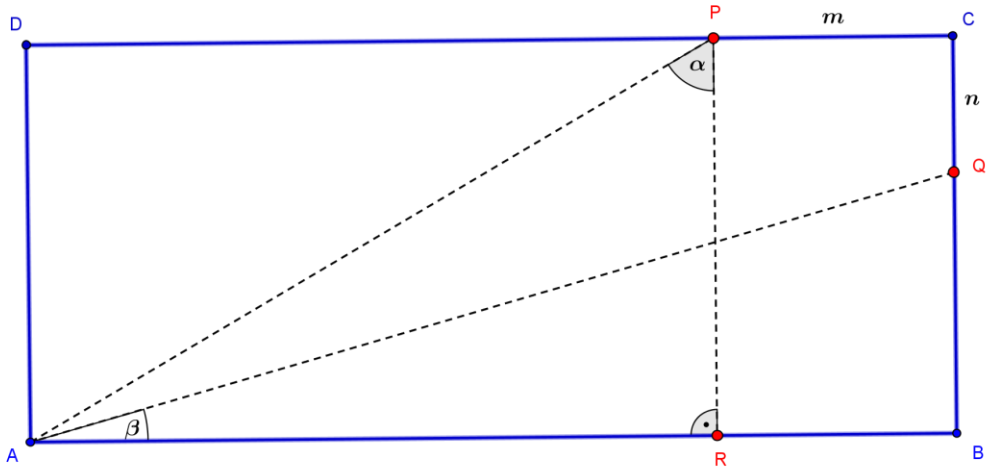
ezért

$$a_{2014} = -\frac{1}{5}.$$ 2 pont

Összesen: 10 pont

2. **Az $ABCD$ téglalapban $AB = 17$, $BC = 8$. A P pont a CD oldalon, C-től m hosszúságegységre, a Q pont a CB oldalon, C-től n hosszúságegységre van.**
Legyen R a P pontból az AB-re húzott merőlegesnek az AB oldalon levő talppontja, legyen továbbá $APR\angle = \alpha$, $QAB\angle = \beta$.
Határozza meg mindazokat a pozitív egészekből álló $m; n$ számpárokat, amelyekre $\alpha - \beta = 45°$!

Megoldás: készítsünk a feltételeknek megfelelő ábrát (1. ábra).



1. ábra

Az APR háromszögben $tg\alpha = \dfrac{AR}{PR}$, mivel azonban $AR = AB - BR = 17 - m$, továbbá $PR = 8$, ezért

(1) $$tg\alpha = \frac{17-m}{8}.$$

Az AQB háromszögben pedig $tg\beta = \dfrac{BQ}{AB}$, ahol $BQ = BC - CQ = 8 - n$, valamint $AB = 17$, így

(2) $$tg\beta = \frac{8-n}{17}.$$ 2 pont

A feladat feltétele szerint $\alpha - \beta = 45°$, ebből $tg(\alpha - \beta) = tg45° = 1$.

Az $\alpha - \beta = 45°$ feltétel és az 1. ábra alapján nyilvánvaló, hogy $0° < \alpha < 90°$ és $0° \le \beta < 90°$, tehát $tg\alpha > 0$ és $tg\beta \ge 0$, ezért $1 + tg\alpha \cdot tg\beta > 0$, tehát alkalmazhatjuk a

$$tg(\alpha - \beta) = \frac{tg\alpha - tg\beta}{1 + tg\alpha \cdot tg\beta}$$

trigonometrikus azonosságot. 1 pont

Az (1) és (2) összefüggések felhasználásával kapjuk, hogy

$$tg(\alpha-\beta)=\frac{\frac{17-m}{8}-\frac{8-n}{17}}{1+\frac{17-m}{8}\cdot\frac{8-n}{17}},$$

ahonnan a műveletek elvégzése és egyszerűsítés után

(3) $$tg(\alpha-\beta)=\frac{225-17m+8n}{272-17n-8m+mn}.$$ 1 pont

Mivel $tg(\alpha-\beta)=1$, ezért (3)-ból

$$225-17m+8n=272-17n-8m+mn$$

következik, amelyből rendezés után,

$$-47=9m+mn-25n,$$

illetve a kapott összefüggés mindkét oldalából a $225=9\cdot 25$ értéket levonva

(4) $$-272=9m+mn-25n-225.$$

(4) jobb oldala szorzattá alakítható:

(5) $$-272=(n+9)\cdot(m-25).$$ 2 pont

Az $m;n$ számok pozitív egészek, így (5) alapján nyilvánvaló, hogy $n+9>0$ illetve $m-25<0$, továbbá a feladat feltételei miatt $1\le n\le 8$, és ezért $10\le n+9\le 17$, valamint $m<17$. 1 pont

Keressük tehát a $272=2^4\cdot 17$ szám olyan pozitív osztóit, amelyek megfelelnek a $10\le n+9\le 17$ feltételnek.

Ilyen pozitív osztó csak az $n+9=16$ és az $n+9=17$, amelyekből $n_1=7$ és $n_2=8$ következik.

Ezekből (5) alapján rendre $m_1=8$ és $m_2=9$ adódik. 2*pont

A feladat megoldásai tehát az $m_1=8; n_1=7$ és az $m_2=9; n_2=8$ számpárok.

Az $m_2=9; n_2=8$ számpár esetén (1) és (2) alapján $tg\alpha=1$, illetve $tg\beta=0$, ezért a B és Q pontok egybeesnek, továbbá $\alpha=45°$ illetve $\beta=0°$, ezekre is teljesül, hogy $\alpha-\beta=45°$. <u>1*pont</u>

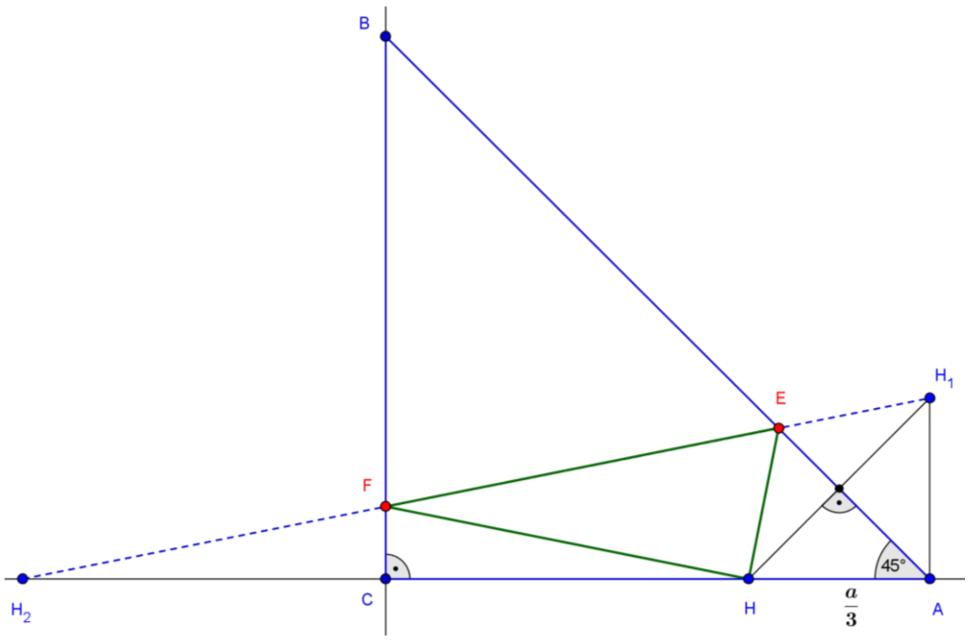
Összesen: 10pont

<u>Megjegyzés:</u> ha a versenyző az $m_2=9; n_2=8$ számpárt és az ehhez tartozó $\alpha=45°$ illetve $\beta=0°$ szögeket figyelmen kívül hagyja, vagy nem tekinti megoldásnak, akkor a *-gal jelzett pontok közül legfeljebb 1 pontot kaphat.

3. Egy ABC háromszögben $AC = BC = a$ és $ACB\angle = 90°$. Az AC oldal A-hoz közelebbi harmadolópontja H.
Határozza meg az AB oldalon az E, a BC oldalon az F pontot úgy, hogy az EFH háromszög kerülete a lehető legkisebb legyen!
Adja meg ennek a minimális kerületnek a nagyságát és a $\frac{BF}{FC}$, illetve $\frac{BE}{EA}$ arányok pontos értékét!

1. Megoldás:

Tükrözzük a H pontot először az AB, majd a BC egyenesre, a képpontok rendre H_1 és H_2 (2. ábra). 1 pont



2. ábra

A H_2 pont az AC egyenesen, a H_1 pont pedig az AC egyenesnek az ABC háromszöglappal azonos oldalán van, ezért az ábra alapján a H_1H_2 egyenes az ABC háromszög AB átfogóját és BC befogóját is metszi, a metszéspontok rendre E és F.

A tükrözés távolságtartó tulajdonsága miatt

(1) $$EH = EH_1 \text{ és } FH = FH_2 .$$

Mivel 1 pont

$$H_1H_2 = H_1E + EF + FH_2 ,$$

és az EFH háromszög kerületére

$$K_{EFH} = HE + EF + FH ,$$

ezért (1) alapján

(2) $$K_{EFH} = H_1H_2.$$

1 pont

Nyilvánvaló, hogy a H_1 és H_2 pontok közötti legrövidebb távolság a H_1H_2 egyenesszakasz, így a 2. ábra EFH háromszöge a legkisebb kerületű azon háromszögek közül, amelyeket a feladat feltételei alapján az ABC háromszögbe rajzolhatunk. 1 pont

A tengelyes tükrözés szögtartó tulajdonsága miatt $H_1AE\angle = 45°$, és ezért $H_1AH\angle = 90°$, vagyis H_1A merőleges AC-re. Eszerint a H_1H_2A háromszög derékszögű háromszög.

A tengelyes tükrözés távolságtartó tulajdonsága miatt pedig

(3) $$H_1A = \frac{a}{3} \text{ és } H_2C = \frac{2a}{3}.$$

Felírhatjuk Pitagorasz-tételét a H_1H_2A derékszögű háromszögre:

(4) $$H_1A^2 + H_2A^2 = H_1H_2{}^2.$$

Mivel $H_1A = \frac{a}{3}$ és $H_2A = \frac{5a}{3}$, ezért (4)-ből

$$H_1H_2{}^2 = \frac{26a^2}{9},$$

vagyis

(5) $$H_1H_2 = \frac{a \cdot \sqrt{26}}{3}.$$

(2) és (5) összevetésével azt kapjuk, hogy a feladat feltételeinek megfelelő legkisebb kerületű háromszög kerülete

$$K_{EFH} = \frac{a \cdot \sqrt{26}}{3}.$$

2 pont

A következőkben meghatározzuk a $\frac{BF}{FC}$ és $\frac{BE}{EA}$ arányok pontos értékét.

A $H_1H_2A\angle$-et metsző H_1A és FC párhuzamos szelőkre felírhatjuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét:

$$\frac{FC}{\frac{a}{3}}=\frac{\frac{2a}{3}}{\frac{5a}{3}},$$

ahonnan a műveletek elvégzése és egyszerűsítés után $FC=\frac{2a}{15}$, innen pedig

$BF=a-FC$ miatt $BF=\frac{13a}{15}$,

és ezért

(6) $$\frac{BF}{FC}=\frac{13}{2}.$$ 2 pont

A H_1AE és FBE háromszögekben $H_1AE\angle=FBE\angle=45°$, valamint a $H_1EA\angle$ és $FEB\angle$ szögek csúcsszögek, ezért a két háromszög megfelelő szögei páronként egyenlők, tehát a H_1AE és FBE háromszögek hasonlók, így megfelelő oldalaik hosszának aránya is egyenlő. Eszerint

$$\frac{BE}{EA}=\frac{BF}{H_1A},$$

azaz $\frac{BE}{EA}=\frac{\frac{13a}{15}}{\frac{a}{3}}$, ahonnan egyszerűsítés után kapjuk, hogy

(7) $$\frac{BE}{EA}=\frac{13}{5}.$$

(6) és (7) alapján a kérdéses arányok pontos értéke $\frac{BF}{FC}=\frac{13}{2}$ és $\frac{BE}{EA}=\frac{13}{5}$. 2 pont

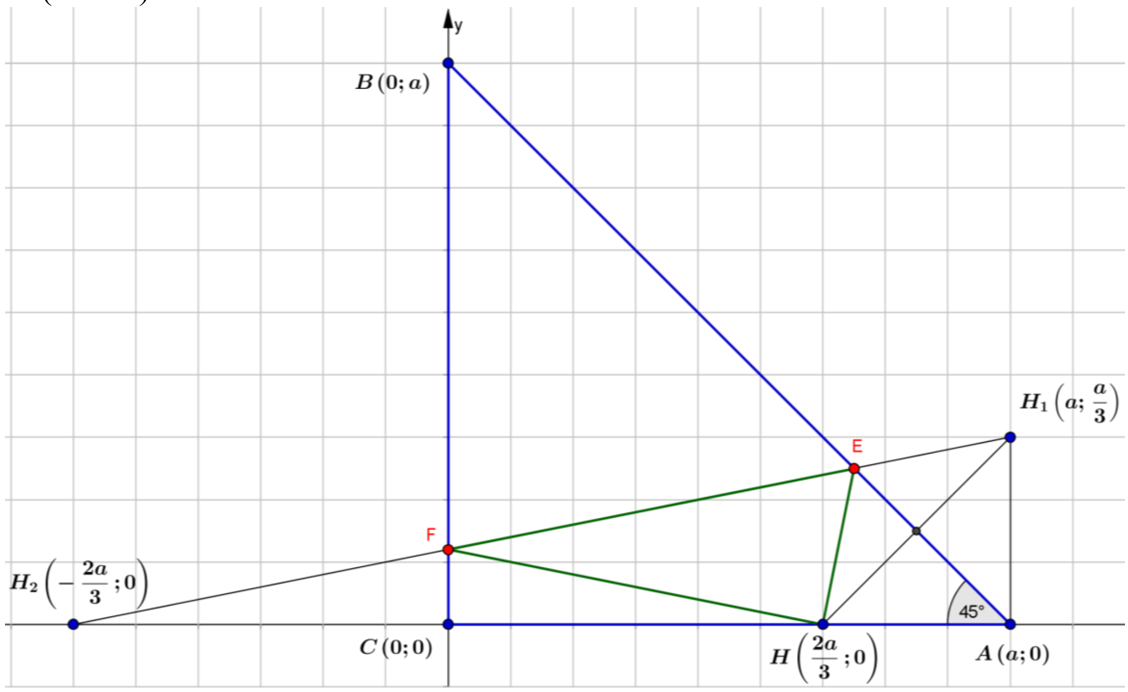
Összesen: 10 pont

2. Megoldás:

az 1. megoldáshoz készített 2. ábrából indulunk ki, azaz tükrözzük a H pontot először az AB, majd a BC egyenesre, a képpontok rendre H_1 és H_2. 1 pont

A megoldás az 1. megoldáshoz hasonlóan folytatódik, addig a megállapításig, hogy a H_1 és H_2 pontok közötti legrövidebb távolság a H_1H_2 egyenesszakasz, így a 2. ábra EFH háromszöge a legkisebb kerületű azon háromszögek közül, amelyeket a feladat feltételei alapján az ABC háromszögbe rajzolhatunk. 3 pont

Ezután az ABC háromszöget olyan derékszögű koordináta-rendszerbe helyezzük, amelynek origója a C pont, az A pont az x tengelyre, a B pont pedig az y tengelyre esik (3. ábra).



3. ábra

Ekkor az ABC háromszög csúcsainak koordinátái $A(a;0)$, $B(0;a)$ és $C(0;0)$, és

$$H_1\left(a;\frac{a}{3}\right) \text{ és } H_2\left(-\frac{2a}{3};0\right).$$ 1 pont

A két pont távolságára vonatkozó képlet alapján

$$H_1H_2=\sqrt{\left(a+\frac{2a}{3}\right)^2+\left(\frac{a}{3}\right)^2}=\frac{a\cdot\sqrt{26}}{3},$$

tehát a minimális kerületű EFH háromszög kerülete

$$K_{EFH}=\frac{a\cdot\sqrt{26}}{3}.$$ 1 pont

Az AB egyenes meredeksége $tg\,135° = -1$ és az egyenes áthalad a $B(0;a)$ ponton, ezért az egyenes egyenlete

(1) $$x + y = a.$$

H_1H_2 egyenes egy irányvektora $\bar{v}\left(\frac{5a}{3};\frac{a}{3}\right)$, illetve az $\frac{a}{3} > 0$ számmal való osztás után $\bar{v}(5;1)$.

Az egyenes áthalad például a $H_2\left(-\frac{2a}{3};0\right)$ ponton, felírhatjuk tehát a H_1H_2 egyenes egyenletét:

(2) $$x - 5y = -\frac{2a}{3}.$$

Az (1) és (2) egyenletekből álló egyenletrendszer megoldása az E pont koordinátáit adja meg. A számítások elvégzése után:

(3) $$E\left(\frac{13a}{18};\frac{5a}{18}\right).$$

A (2) egyenletbe az $x = 0$ értéket helyettesítve megkapjuk az F pont koordinátáit, amelyek

(4) $$F\left(0;\frac{2a}{15}\right).$$ 2 pont

A két pont távolságára vonatkozó képlet alapján

$$BE = \sqrt{\left(-\frac{13a}{18}\right)^2 + \left(a - \frac{5a}{18}\right)^2} = \frac{13a \cdot \sqrt{2}}{18},$$

illetve

$$EA = \sqrt{\left(\frac{13a}{18} - a\right)^2 + \left(\frac{5a}{18}\right)^2} = \frac{5a \cdot \sqrt{2}}{18}.$$

Eredményeinkből a megfelelő oldalak elosztása után azt kapjuk, hogy

(5) $$\frac{BE}{EA} = \frac{13}{5}.$$

Ugyanakkor (4) szerint $FC = \frac{2a}{15}$, így $BF = \frac{13a}{15}$ és ezért

(6) $$\frac{BF}{FC} = \frac{13}{2}.$$

(5) és (6) alapján a kérdéses arányok pontos értéke $\frac{BF}{FC} = \frac{13}{2}$ és $\frac{BE}{EA} = \frac{13}{5}$. 2 pont

Összesen: 10 pont