A 2015/2016. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
második forduló

MATEMATIKA

I. KATEGÓRIA (SZAKKÖZÉPISKOLA)

Javítási-értékelési útmutató

1. Egy adott földterület felásását három munkás végzi. Éppen elkészülnek a munkával, ha az első 5 napot, a második 7 napot, a harmadik 4 napot dolgozik. Akkor is éppen elkészülnének a munkával, ha az első munkás 7 napot, a második 9 napot és a harmadik 2 napot dolgozna. Hány napot kellene a munka elvégzéséhez a harmadik munkásnak dolgoznia, ha az első csak 2 napot, a második pedig csak 4 napot dolgozna?

Megoldás:

Tegyük fel, hogy az első munkás x nap alatt, a második y nap alatt, a harmadik z nap alatt végezné el egyedül a munkát.

Ha az első 5 napot, a második 7 napot, a harmadik 4 napot dolgozik, akkor rendre elvégzik a munka $\frac{5}{x};\frac{7}{y}$ illetve $\frac{4}{z}$-ed részét.

Azt is tudjuk, hogy hárman együtt így az egész munkát elvégzik:

(1) $$\frac{5}{x}+\frac{7}{y}+\frac{4}{z}=1.$$ 1 pont

Hasonlóan kapjuk, hogy ha az első 7 napot, a második 9 napot és a harmadik 2 napot dolgozna, akkor rendre elvégeznék a munka $\frac{7}{x};\frac{9}{y}$ illetve $\frac{2}{z}$-ed részét.

Ebből azt kapjuk, hogy

(2) $$\frac{7}{x}+\frac{9}{y}+\frac{2}{z}=1.$$ 1 pont

A két egyenlet bal oldalait egyenlővé téve:

(3) $$\frac{5}{x}+\frac{7}{y}+\frac{4}{z}=\frac{7}{x}+\frac{9}{y}+\frac{2}{z}.$$ 1 pont

A (3) egyenletből rendezés és 2-vel való egyszerűsítés után adódik, hogy

(4) $$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{z}.$$ 1 pont

A (2) egyenlet $\frac{7}{x}+\frac{9}{y}+\frac{2}{z}=\frac{7}{x}+\frac{7}{y}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}=1$ alakban is írható, ez pedig (4) alapján azt jelenti, hogy

(5) $$\frac{2}{y}+\frac{9}{z}=1.$$ 1 pont

Ha az első munkás 2 napig, a második 4 napig dolgozna, akkor tegyük fel, hogy a harmadik munkásnak d napra lenne szüksége a teljes munka elvégzéséhez.

Ekkor (4) ismételt felhasználásával $\frac{2}{x}+\frac{4}{y}+\frac{d}{z}=\frac{2}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{y}+\frac{d}{z}=\frac{2}{z}+\frac{2}{y}+\frac{d}{z}$, azaz

(6) $$\frac{2}{y}+\frac{d+2}{z}=1.$$ 2 pont

Az (5) és (6) összevetése után azt kapjuk, hogy $d+2=9$, ahonnan

$$d=7.$$ 1 pont

A harmadik munkásnak tehát 7 napot kellene dolgoznia a teljes munka elvégzéséhez, ha az első munkás 2 napot, a második munkás 4 napot dolgozna. 1 pont

Az (1) és (2) egyenleteket kielégítő $x;y;z$ valós számok léteznek, például az $x=y=20$ és $z=10$ számhármas mindkét egyenletnek megoldása. 1 pont

Összesen: 10 pont

Megjegyzés:
Az (1) és (2) egyenletek felírása után az (1) egyenlet mindkét oldalának 5-tel való szorzása, és a (2) egyenlet mindkét oldalának 3-mal való szorzása után a kapott egyenleteket kivonhatjuk egymásból.
Ekkor $\frac{4}{x}+\frac{8}{y}+\frac{14}{z}=2$, innen 2-vel egyszerűsítve $\frac{2}{x}+\frac{4}{y}+\frac{7}{z}=1$.
Ebből pedig leolvasható, hogy a harmadik munkásnak 7 napot kellene dolgoznia a teljes munka elvégzéséhez, ha az első munkás 2 napot, a második munkás 4 napot dolgozna.
Ez lehetséges is, mert például $x=y=20$ és $z=10$ esetén a felírt egyenletek teljesülnek.
Ha a versenyző ezt a megoldási utat választja, akkor helyes megoldás esetén teljes pontszámot kap.

2. Húzzon egy vízszintes egyenest, majd egy erre merőleges függőleges egyenest, ezután az utóbbira merőleges vízszintes egyenest, és így tovább. Minden újabb egyenes legyen merőleges a közvetlen előtte húzott egyenesre és különbözzön az összes előző egyenestől! Bizonyítsa be, hogy az eljárást bármikor abbahagyva a keletkező metszéspontok száma vagy két egymást követő természetes szám szorzatával vagy egy négyzetszámmal egyenlő!

Megoldás:

A lehetséges metszéspontok számát aszerint csoportosítjuk, hogy az eljárást függőleges, vagy vízszintes egyenes megrajzolása után hagyjuk abba.

A vízszintes egyenesek párhuzamosak egymással, a függőleges egyenesek is párhuzamosak egymással, ezért metszéspontok csak vízszintes és függőleges egyenesek találkozásánál jönnek létre. 1 pont

Amennyiben függőleges egyenes behúzása után hagyjuk abba az eljárást, akkor nyilvánvaló, hogy ugyanannyi vízszintes és függőleges egyenes lesz. 2 pont

Ha pedig az eljárást vízszintes egyenes behúzása után hagyjuk abba, akkor pedig 1-gyel több vízszintes egyenes lesz, mint függőleges. 2 pont

Az első esetben n darab vízszintes és n darab függőleges egyenes megrajzolása után abbahagyva az eljárást, mindegyik vízszintes egyenest n darab függőleges egyenes metsz.

Ezért $n \cdot n = n^2$ metszéspontot kapunk, tehát a kapott metszéspontok száma négyzetszám. 2 pont

A második esetben, amikor az eljárást vízszintes egyenes rajzolása után hagyjuk abba, akkor n függőleges egyenes esetén $n+1$ vízszintes egyenest rajzoltunk meg.

Ekkor az $n+1$ vízszintes egyenes mindegyikén n darab metszéspont van, ez pedig azt jelenti, hogy a metszéspontok száma $n \cdot (n+1)$, vagyis két egymást követő pozitív egész szám szorzata. 2 pont

Ezzel beláttuk, hogy az eljárást bármikor abbahagyva a keletkezett metszéspontok száma valóban vagy négyzetszám, vagy két egymást követő pozitív egész szám szorzata. 1 pont

Összesen: 10 pont

3. Bizonyítsa be, hogy minden x valós szám esetén $2\cdot|\sin x|+3\cdot|\cos x|\ge 2$!
Mikor áll fenn egyenlőség?

1. Megoldás:

Az $f(x)=\sin x$ függvény tulajdonságai alapján minden x valós számra teljesül, hogy $-1\le \sin x\le 1$, és ezért

(1) $$0\le|\sin x|\le 1.$$ 1 pont

Az (1) összefüggés alapján azt kapjuk, hogy $|\sin x|^2\le|\sin x|$, és mivel $|\sin x|^2=\sin^2 x$, ezért

(2) $$|\sin x|\ge \sin^2 x.$$ 1 pont

Hasonlóképpen a $g(x)=\cos x$ függvény tulajdonságai alapján minden x valós számra $-1\le \cos x\le 1$, és így

(3) $$0\le|\cos x|\le 1.$$ 1 pont

Ebből pedig az következik, hogy $|\cos x|^2\le|\cos x|$, és mivel $|\cos x|^2=\cos^2 x$, ezért

(4) $$|\cos x|\ge \cos^2 x.$$ 1 pont

A (2) és (4) összefüggések összevetésével adódik, hogy

(5) $$2\cdot|\sin x|+3\cdot|\cos|\ge 2\cdot\sin^2 x+3\cdot\cos^2 x.$$ 2 pont

Az (5) egyenlőtlenség jobb oldalán $2\cdot\sin^2 x+3\cdot\cos^2 x=2\cdot\sin^2 x+2\cdot\cos^2 x+\cos^2 x$, ebből pedig a $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ trigonometrikus azonosság alapján az következik, hogy

(6) $$2\cdot|\sin x|+3\cdot|\cos|\ge 2+\cos^2 x.$$ 1 pont

Mivel $\cos^2 x\ge 0$, ezért (6)-ból a

$$2\cdot|\sin x|+3\cdot|\cos x|\ge 2$$

bizonyítandó állítás azonnal adódik. 1 pont

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\cos x=0$, ekkor $|\sin x|=1$, azaz $\sin x=\pm 1$.

Az egyenlőtlenségben az egyenlőség esete tehát az $x=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi \quad (k\in Z)$ valós számokra áll fenn. 2 pont

Összesen: 10 pont

2. Megoldás:

Mivel $|\sin x| \geq 0$ és $|\cos x| \geq 0$, ezért a bizonyítandó $2 \cdot |\sin x| + 3 \cdot |\cos x| \geq 2$ egyenlőtlenség mindkét oldalának négyzetre emelése ekvivalens átalakítás. 1 pont

A négyzetre emelés után azt kapjuk, hogy

(1) $$4 \cdot |\sin x|^2 + 12 \cdot |\sin x| \cdot |\cos x| + 9 \cdot |\cos x|^2 \geq 4.$$ 1 pont

Nyilvánvaló, hogy $|\sin x|^2 = \sin^2 x$ és $|\cos x|^2 = \cos^2 x$, ezért az (1) összefüggésből előbb

$4 \cdot \sin^2 x + 12 \cdot |\sin x| \cdot |\cos| + 9 \cdot \cos^2 x \geq 4$, illetve

(2) $$4 \cdot \left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) + 12 \cdot |\sin x| \cdot |\cos x| + 5 \cdot \cos^2 x \geq 4$$

következik. 2 pont

A $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ trigonometrikus azonosság alapján (2)-ből azt kapjuk, hogy

(3) $$12 \cdot |\sin x| \cdot |\cos x| + 5 \cdot \cos^2 x \geq 0.$$ 2 pont

A (3) egyenlőtlenség pedig nyilvánvalóan teljesül, hiszen $|\sin x| \geq 0$ és $|\cos x| \geq 0$, továbbá $\cos^2 x \geq 0$. 1 pont

Egyenlőség esetén $12 \cdot |\sin x| \cdot |\cos x| + 5 \cdot |\cos x|^2 = 0$, azaz

(4) $$|\cos x| \cdot \left(12 \cdot |\sin x| + 5 \cdot |\cos x|\right) = 0.$$ 1 pont

Mivel $|\sin x| \geq 0$ és $|\cos x| \geq 0$, ezért $12 \cdot |\sin x| + 5 \cdot |\cos x| = 0$ csak akkor állhatna fenn, ha $|\sin x| = 0$ és $|\cos x| = 0$ egyszerre lenne igaz, de ez nem teljesül egyetlen x valós számra sem. 2 pont

Ezért csak $|\cos x| = 0$ lehetséges, ekkor $\cos x = 0$, és így $|\sin x| = 1$, azaz $\sin x = \pm 1$.

Az egyenlőtlenségben az egyenlőség esete tehát az $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad (k \in Z)$ valós számokra áll fenn. <u>1 pont</u>

Összesen: 10 pont

3. Megoldás:

A derékszögű koordinátarendszerben megrajzolt, origó középpontú, egységnyi sugarú körben $\cos x$ és $\sin x$ rendre az $\bar{i}\,(1;0)$ egységvektortól x radián szöggel elforgatott egységvektor koordinátái. 1 pont

Ha $\sin x = 0$, akkor $|\cos x| = 1$.

Ekkor a bizonyítandó $2 \cdot |\sin x| + 3 \cdot |\cos x| \geq 2$ egyenlőtlenség nyilvánvalóan teljesül.

Egyenlőség azonban nem állhat fenn, mert $2 \cdot 0 + 3 \cdot 1 > 2$. 2 pont

Ha pedig $\cos x = 0$, akkor $|\sin x| = 1$.

A bizonyítandó $2 \cdot |\sin x| + 3 \cdot |\cos x| \geq 2$ egyenlőtlenségben ekkor az egyenlőség esete áll fenn. 2 pont

Végül, ha $\sin x \neq 0$ és $\cos x \neq 0$ egyszerre igaz, akkor $|\sin x|$ és $|\cos x|$ az egységnyi átfogójú derékszögű háromszög befogói. 1 pont

Erre a háromszögre teljesül a háromszög-egyenlőtlenség, azaz

(1) $$|\sin x| + |\cos x| > 1.$$ 1 pont

Az (1) összefüggésből kapjuk, hogy

$$2 \cdot |\sin x| + 2 \cdot |\cos x| > 2,$$

innen pedig $|\cos x| \geq 0$ miatt adódik a bizonyítandó

$$2 \cdot |\sin x| + 3 \cdot |\cos x| > 2$$

egyenlőtlenség. 2 pont

Minden lehetséges esetet megvizsgáltunk, azt kaptuk, hogy az $2 \cdot |\sin x| + 3 \cdot |\cos x| \geq 2$ egyenlőtlenség minden $x \in R$ számra igaz.

Egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $\cos x = 0$, ekkor $|\sin x| = 1$, vagyis $\sin x = \pm 1$.

Az egyenlőség esete tehát az $x = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi \quad (k \in Z)$ valós számokra áll fenn. 1 pont

Összesen: 10 pont

4. Határozza meg a $2^{1\cdot\log_{\sqrt{2}}\sqrt{2}}\cdot 3^{2\cdot\log_{\sqrt{3}}\sqrt{2}}\cdot 4^{3\cdot\log_{\sqrt{4}}\sqrt{2}}\cdot\ldots\cdot 2015^{2014\cdot\log_{\sqrt{2015}}\sqrt{2}}$ szorzat utolsó számjegyét!

Megoldás:

Tekintsük a szorzat egyik tényezőjét, ebben a hatványalap legyen k $(k=2;3;4;\ldots;2015)$, ez esetben a hatványkitevő rendre

$$(k-1)\cdot\log_{\sqrt{k}}\sqrt{2}\,.$$ 1 pont

Ekkor a hatványozás azonossága alapján:

(1) $$k^{(k-1)\cdot\log_{\sqrt{k}}\sqrt{2}}=\sqrt{k}^{\,2\cdot(k-1)\cdot\log_{\sqrt{k}}\sqrt{2}}.$$ 2 pont

Az (1) jobb oldalán alkalmazva a hatványozás azonosságát, azt kapjuk, hogy

(2) $$\sqrt{k}^{\,2\cdot(k-1)\cdot\log_{\sqrt{k}}\sqrt{2}}=\left(\left(\sqrt{k}\right)^{\log_{\sqrt{k}}\sqrt{2}}\right)^{2\cdot(k-1)}.$$ 1 pont

A logaritmus definíciója szerint $\left(\sqrt{k}\right)^{\log_{\sqrt{k}}\sqrt{2}}=\sqrt{2}$, ezért (1) és (2) felhasználásával

(3) $$k^{(k-1)\cdot\log_{\sqrt{k}}\sqrt{2}}=\left(\sqrt{2}\right)^{2\cdot(k-1)}=2^{k-1}.$$ 2 pont

A (3) alapján a szorzat minden tényezője azonosan átalakítható úgy, hogy 2-nek a k hatványalapnál éppen 1-gyel kisebb hatványát kapjuk.

Eszerint a szorzat felírható a következő formában is:

(4) $$2^1\cdot 2^2\cdot\ldots\cdot 2^{2013}\cdot 2^{2014}=2^{1+2+\ldots+2013+2014}.$$ 1 pont

(4) jobb oldalán a kitevőben látható összeg egy olyan számtani sorozat első 2014 tagjának összege, amelyben az első tag $a_1=1$ és a differencia $d=1$. A számtani sorozat összegképletével felírva

(5) $$2^{1+2+\ldots+2013+2014}=2^{\frac{2014\cdot 2015}{2}}=2^{1007\cdot 2015}.$$ 1 pont

Felhasználjuk, hogy a 2 hatványainak utolsó számjegyei $2;4;8;6$ négyes ciklussal ismétlődnek. Ezért a 2 hatványkitevőjének 4-es maradéka meghatározza a szorzat utolsó számjegyét.

Az 1007 és a 2015 számok 4-es maradéka egyaránt 3, ezért szorzatuk 4-es maradéka 1. 1 pont

Emiatt a $2^{1007\cdot 2015}$, tehát a $2^{1\cdot\log_{\sqrt{2}}\sqrt{2}}\cdot 3^{2\cdot\log_{\sqrt{3}}\sqrt{2}}\cdot 4^{3\cdot\log_{\sqrt{4}}\sqrt{2}}\cdot\ldots\cdot 2015^{2014\cdot\log_{\sqrt{2015}}\sqrt{2}}$ szorzat utolsó számjegye a 2. 1 pont

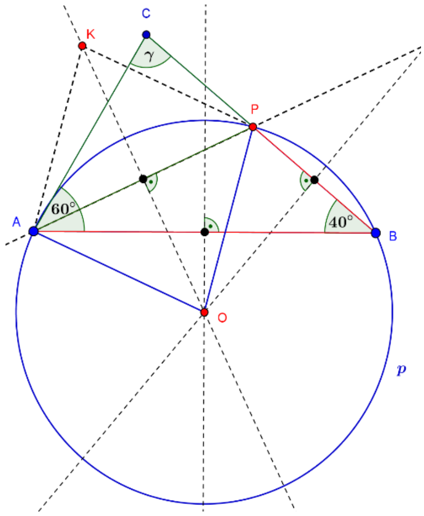
Összesen: 10 pont

Megjegyzés: A versenyző az $1007\cdot 2015=2029105$ szorzat 4-es maradékát számológéppel is kiszámolhatja.

5. Az ABC háromszögben a szokásos jelölések mellett $\alpha = 60°$ és $\beta = 40°$.
Legyen a P pont a BC oldal egy belső pontja.
Bizonyítsa be, hogy az ABP háromszög körülírt körének középpontját az AP egyenesre tükrözve a PCA háromszög körülírt körének egy pontját kapjuk!

Megoldás:

A feltételeknek megfelelő ábrát készítünk (1. ábra).



1. ábra

1 pont

Az 1. ábrán az ABP háromszög köré írt p körének középpontja az O pont.
A p körben az $ABP\angle = 40°$ kerületi szög, ez a szög ahhoz az AP ívhez tartozik, amelyen az A pontból a P pontba negatív irányban haladva juthatunk el. 1 pont

Az $AOP\angle$ pedig a p körben ugyanehhez az ívhez tartozó középponti szög.
Így a kerületi és középponti szögek tétele alapján $AOP\angle = 2 \cdot ABP\angle = 80°$. 2 pont

Legyen az O pontnak az AP egyenesre vonatkozó tükörképe a K pont.
A tengelyes tükrözés a szögek nagyságát nem változtatja meg, ezért

(1) $$AOP\angle = AKP\angle = 80°.$$ 2 pont

Ugyanakkor az ABC háromszög C csúcsánál fekvő belső szögére

$$\gamma = ACB\angle = 80°.$$ 1 pont

Nyilvánvaló, hogy a K és C pontok az AP egyenesnek ugyanazon oldalán vannak, hiszen P pont a BC oldal belső pontja.
Eszerint az AP egyenesnek ugyanazon oldalán levő K és C pontokból az AP szakasz egyenlő nagyságú szögekben látszik, ezért a K és C pont is rajta van az AP szakasz fölé rajzolt $80°$-os látószögköríven. 2 pont

Ez azt jelenti, hogy a K pont rajta van a PCA háromszög körülírt körén, és éppen ezt akartuk bizonyítani. 1 pont

Összesen: 10 pont

<u>Megjegyzés:</u> Megmutatható, hogy a feladat állítása általánosabb esetben is igaz.

Megoldásunk során ugyanis lényegében csak azt használtuk ki, hogy az $ABC\angle = \beta$ és az $ACB\angle = \gamma$ jelöléssel $\gamma = 2\beta$, valamint azt a fontos feltételt, hogy az O és B pontok az AP egyenes által határolt két félsík közül ugyanabba a félsíkba esnek.
Ezt ki kell egészítenünk azzal, hogy mivel $\gamma + \beta = 3\beta$ és $\gamma + \beta < 180°$, ezért $3\beta < 180°$, azaz $\beta < 60°$.

Eszerint az állítás teljesül minden olyan háromszögre, amelyben $0° < \beta < 60°$, továbbá $\gamma = 2\beta$, és az O és B pontok az AP egyenes által határolt két félsík közül ugyanabba a félsíkba esnek.